Macroeconomia Microfundamentada

Consumo, Poupança e a Hipótese da Renda Permanente

Tomás R. Martinez

INSPER

Referências

- Kurlat: Cap. 6
- Garín, Leste, and Sims: Cap. 9, 10.

A Visão Keynesiana do Consumo

Keynes (1936):

> "The fundamental psychological law, upon which we are entitled to depend with great confidence both a priori from our knowledge of human nature and from the detailed facts of experience, is that men are disposed, as a rule and on the average, to increase their consumption as their income increases but not by as much as the increase in the income."

O que isso quer dizer?

A Visão Keynesiana do Consumo: Interpretação Matemática

- Consumo é uma função crescente da renda:

$$C = \mathcal{C}(Y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \mathcal{C}(Y)}{\partial Y} > 0$$

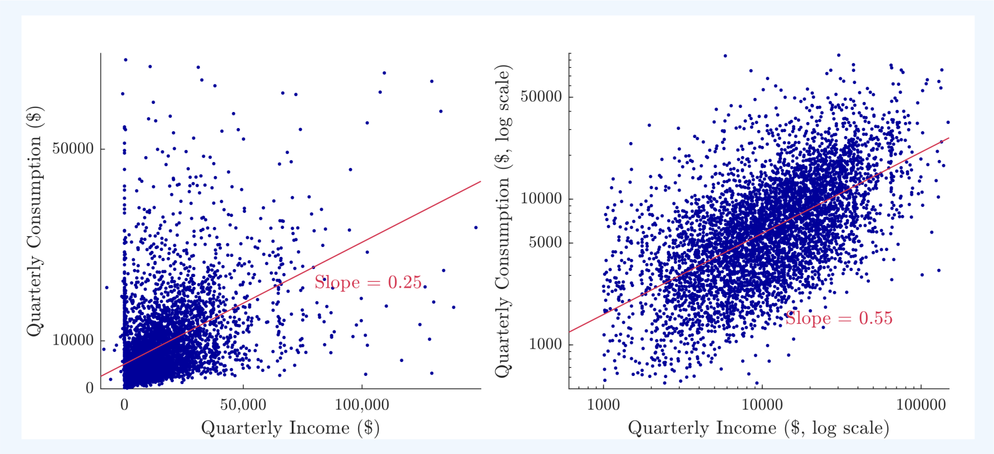
- A propensão marginal a consumir (MPC) é menor que um:

$$\frac{\partial \mathcal{C}(Y)}{\partial Y} < 1$$

- Outra interpretação: A elasticidade do consumo em relação à renda é menor do que um:

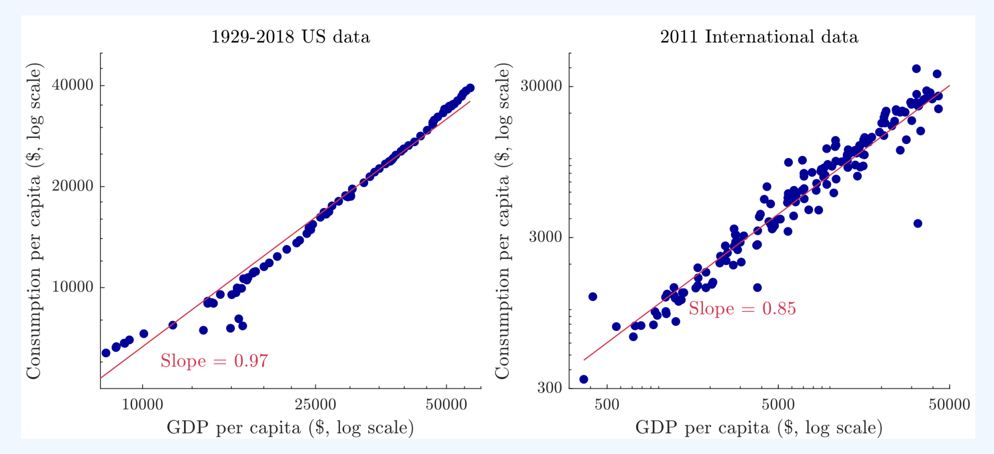
$$\frac{\partial \mathcal{C}(Y)}{\partial Y} \frac{Y}{\mathcal{C}(Y)} = \frac{\partial \log(\mathcal{C}(Y))}{\partial \log(Y)} < 1$$

Evidência Empírica: Microdados



Fonte: Kurlat.

Evidência Empírica: Dados Agregados



Fonte: Kurlat.

Resumo

- Os microdados parecem consistente com a função de consumo Keynesiana.
  - A inclinação em nível e em $\log$ é menor que 1.
- O que isso quer dizer se um país crescer e sua renda aumentar?
  - Se a inclinação for < 1, a razão C/Y vai diminuir??
- Os dados agregados NÃO são consistentes com a função de consumo Keynesiana.
- Como reconciliar a evidência micro com a macro?

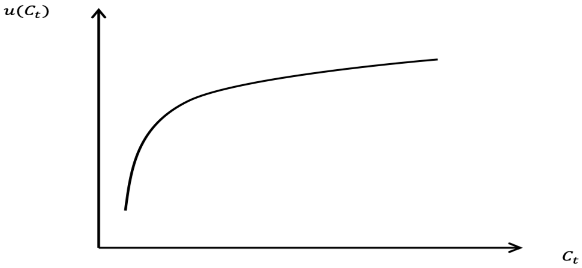
Um Modelo de Consumo de 2-períodos

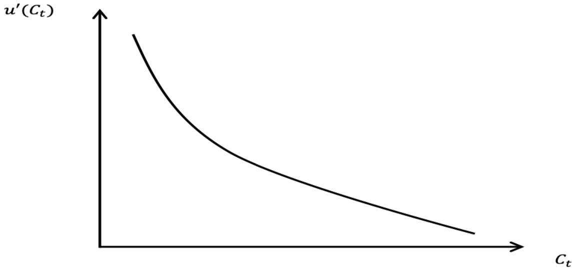
- Imagine uma família/indivíduo que decide quanto consumir e poupar.
- **Horizonte**: A família vive durante 2 períodos, $t = 1, 2$.
- **Impaciência**: A famiília prefere consumir hoje do que amanhã. A utilidade:

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2),$$

  onde $0 < \beta < 1$ reflete impaciência.
- A função utilidade de um período $u(c_t)$: $u'(c_t) > 0$, $u''(c_t) < 0$.
- Não há incerteza (ainda)!

Função Utilidade





Exemplo de Funções Utilidades

Algumas funções utilidades:

$$u(c_t) = \ln c_t$$

$$u(c_t) = \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma > 0$$

$$u(c_t) = \theta c_t, \quad \theta > 0$$

$$u(c_t) = c_t - \theta \frac{c_t^2}{2} \quad \theta > 0$$

A Restrição Orçamentária da Família

- Defina y_1 e y_2 como a renda da família no período 1 e 2.
- Em $t = 1$, a restrição orçamentária da família é:

$$c_1 + a_2 \leq y_1$$

  onde a_2 é a poupança que é levada para o período seguinte (assuma que ela não tem poupança inicial $a_1 = 0$). Se $a_2 < 0$, é uma dívida.

A Restrição Orçamentária da Família

- Defina y_1 e y_2 como a renda da família no período 1 e 2.
- Em $t = 1$, a restrição orçamentária da família é:

$$c_1 + a_2 \leq y_1$$

  onde a_2 é a poupança que é levada para o período seguinte (assuma que ela não tem poupança inicial $a_1 = 0$). Se $a_2 < 0$, é uma dívida.
- Em $t = 2$, a família recebe (ou paga) os juros da sua poupança. A rest. orçamentária é:

$$c_2 + a_3 \leq y_2 + (1 + r)a_2$$

- Assuma que a família não pode morrer endividada: $a_3 \geq 0$. Por outro lado, ela não quer morrer com "dinheiro no banco" $\rightarrow a_2 = 0$.

A Restrição Orçamentária Intertemporal

- Colocando $a_3 = 0$ e substituindo a_2, encontramos a **restrição orçamentária intertemporal**:

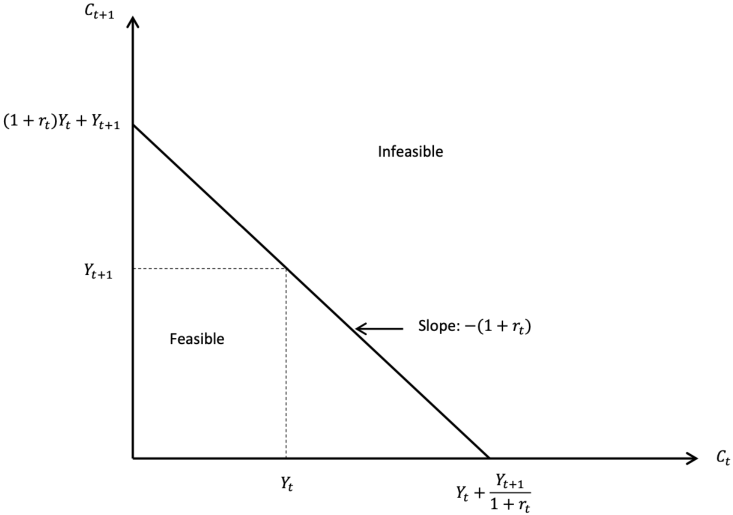
$$\underbrace{c_1 + \frac{c_2}{1+r}}_{\text{valor presente do consumo}} \leq \underbrace{y_1 + \frac{y_2}{1+r}}_{\text{valor presente da renda}}$$

- Note que $1/(1+r)$ é o preço do consumo c_2 em unidades de c_1.
  - Deixando de consumir uma unidade de c_1, faz com que você consuma $1+r$ unidades de c_2.

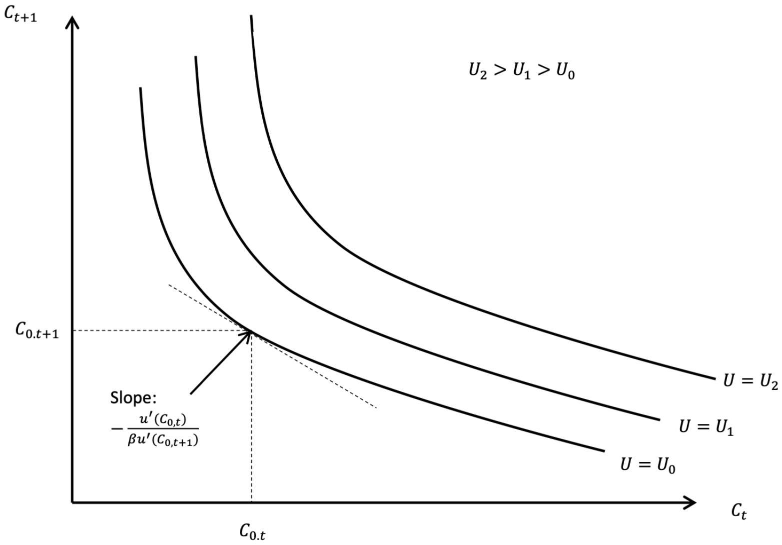
- Se a taxa de juros estiver alta, o preço de c_2 está barato em relação a c_1 e vice versa.

- **Intuição:** problema de escolha do consumidor da micro com 2 bens.

Restrição Orçamentária



Curvas de Indiferença



Problema de Maximização da Família

- Problema:

$$\max_{c_1, c_2} \quad u(c_1) + \beta u(c_2)$$

$$\text{s.à} \quad c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

- Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, \lambda) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left(y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right)$$

- C.P.O:

$$u'(c_1) = \lambda \qquad \text{e} \qquad \beta u'(c_2) = \frac{\lambda}{1+r}$$

Equação de Euler

- Substituindo λ, encontramos a **Equação de Euler**:

$$u'(c_1) = (1+r)\beta u'(c_2)$$

- A **Equação de Euler** é possivelmente a equação mais importante da macro moderna: descreve o trade-off entre consumo-poupança.

- Na margem, o indíviduo é indiferente entre:
  - Consumir mais hoje: $u'(c_1)$;
  - Poupar e consumir mais amanhã: $(1+r)\beta u'(c_2)$.

Equação de Euler

- Substituindo λ, encontramos a **Equação de Euler**:

$$u'(c_1) = (1+r)\beta u'(c_2)$$

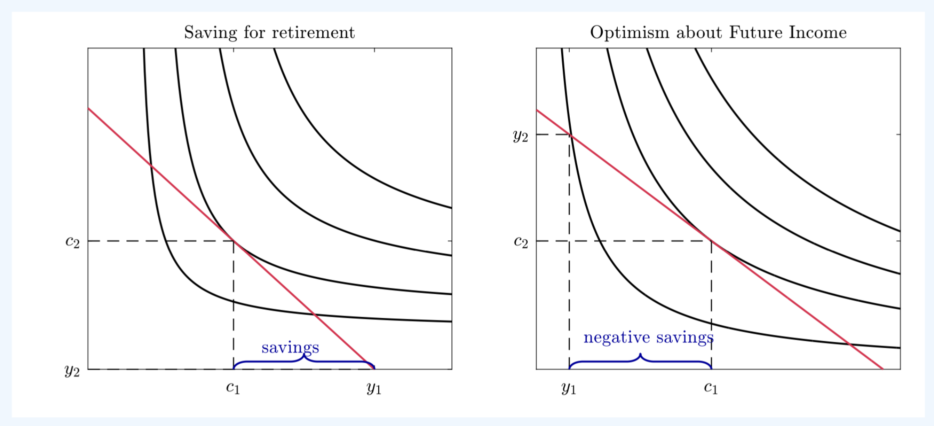
- A **Equação de Euler** é possivelmente a equação mais importante da macro moderna: descreve o trade-off entre consumo-poupança.

- Na margem, o indíviduo é indiferente entre:
  - Consumir mais hoje: $u'(c_1)$;
  - Poupar e consumir mais amanhã: $(1+r)\beta u'(c_2)$.

- Neste modelo, indivíduos a decisão de poupança depende:
  - Substituição intertemporal, i.e. resposta do consumo à mudanças da tx. de juros, r.
  - Suavização de consumo.

Suavização de Consumo: dois exemplos

- Dado as hipóteses sobre $u'(c)$, o indíviduo vai querer "suavizar" o consumo no tempo.



Fonte: Kurlat.

Exemplo: Utilidade CRRA

- Utilidade CRRA (constant relative risk aversion): $u(c) = \dfrac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$ e $u'(c) = c^{-\sigma}$.
- Substituindo na Equação de Euler:

$$c_1^{-\sigma} = (1+r)\beta c_2^{-\sigma} \qquad \Rightarrow \quad c_2 = [(1+r)\beta]^{\frac{1}{\sigma}} c_1$$

- Substituindo na restrição orçamentária intertemporal:

$$c_1 \left(1 + \frac{[(1+r)\beta]^{\frac{1}{\sigma}}}{1+r} \right) = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

- Função consumo c_1 (podemos derivar c_2 e a da mesma maneira):

$$c_1 = \frac{y_1 + \frac{y_2}{1+r}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}}$$

Efeitos da Taxa de Juros

- Diferente da função Keynesiana, a função consumo depende da renda presente, futura e da taxa de juros:

$$c_1 = \underbrace{\mathcal{C}_1^d(y_1, y_2, r)}_{\text{Função consumo em } t=1} = \frac{y_1 + \frac{y_2}{1+r}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}}$$

- O que acontece quando a taxa de juros aumenta?

- Graficamente, a curva de restrição orçamentária fica mais inclinada.

- Como qualquer mudança de preço, temos dois efeitos: **efeito substituição** e **efeito renda**.

Efeitos da Taxa de Juros

- **Efeito substituição**: consumo de hoje fica mais caro em relação ao consumo futuro, o que desencoraja consumo hoje: $\uparrow r \Rightarrow \downarrow c_1$.

- **Efeito renda**: efeito ambíguo.
  - Se o indivíduo está poupando, o efeito renda será positivo (e o consumo aumenta).
  - Se o indivíduo está se endividando, o efeito renda será negativo (e o consumo diminui).

Efeitos da Taxa de Juros

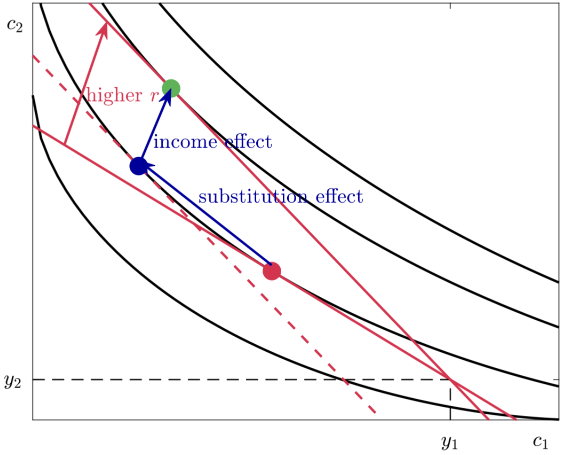
- **Efeito substituição**: consumo de hoje fica mais caro em relação ao consumo futuro, o que desencoraja consumo hoje: $\uparrow r \Rightarrow \downarrow c_1$.

- **Efeito renda**: efeito ambíguo.
  - Se o indivíduo está poupando, o efeito renda será positivo (e o consumo aumenta).
  - Se o indivíduo está se endividando, o efeito renda será negativo (e o consumo diminui).

- O efeito total da taxa de juros em c_1:
  - É negativo, se o indivíduo está se endividando.
  - É ambíguo, se o indivíduo está poupando. Depende se o efeito substituição ou renda domina.

- Iremos assumir que **efeito substituição** sempre domina, já que esse é o caso empiricamente relevante.

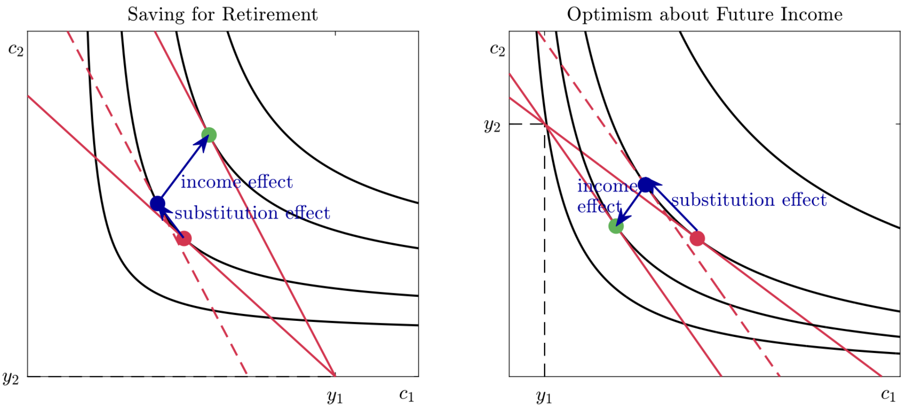
Efeitos da Taxa de Juros: Substituição e Renda



Fonte: Kurlat.

Efeito Renda na Taxa de Juros: Dois Casos

Figura: Poupador (esquerda) e Endividado (direita)



Fonte: Kurlat.

Efeito Renda e Substituição

- **Exemplo:** Suponha $y_2 = 0$, ou seja o indivíduo é um poupador em $t = 1$ (efeito renda é positivo).

- Matematicamente, temos que o efeito de um aumento da tx. de juros:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_1^d(.)}{\partial r} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1 + r)^{\frac{1}{\sigma} - 2}}{\left[1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}} (1 + r)^{\frac{1}{\sigma} - 1}\right]^2} y_1$$

- Note a importância de $1/\sigma$:
  - Se $\frac{1}{\sigma} < 1 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{C}_1^d(.)}{\partial r} > 0$, efeito renda domina.
  - Se $\frac{1}{\sigma} > 1 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{C}_1^d(.)}{\partial r} < 0$, efeito substituição domina.
  - Se $\sigma = 1 \Rightarrow$ os efeitos renda e substituição se cancelam (utilidade log).

Intertemporal Elasticity of Substitution (IES)

- Economistas chamam $1/\sigma$ de elasticidade intertemporal de substituição porque governa a disposição das pessoas em ajustar seu consumo entre os períodos.

- Da equação de Euler temos que:

$$\text{IES} \equiv \frac{\partial \log \frac{c_2}{c_1}}{\partial \log(1+r)} = \frac{1}{\sigma}$$

- Quando mais alto for a IES, $1/\sigma$, maior será o efeito substituição.

- Na utilidade CRRA, o σ também é o parâmetro de aversão ao risco.

A Hipótese da Renda Permanente

- No nosso modelo, a função consumo, $\mathcal{C}_t^d$, depende de todo o valor presente da renda: **Hipótese da Renda Permanente** (Friedman, 1957 - Nobel em 1976).

- Defina a **Propensão Marginal a Consumir** (marginal propensity to consume, MPC) como a derivada parcial do consumo em relação a renda presente:

$$\mathsf{MPC}_t \equiv \frac{\partial \mathcal{C}_t^d}{\partial y_t}$$

A Hipótese da Renda Permanente

- No nosso modelo, a função consumo, $\mathcal{C}_t^d$, depende de todo o valor presente da renda: **Hipótese da Renda Permanente** (Friedman, 1957 - Nobel em 1976).

- Defina a **Propensão Marginal a Consumir** (marginal propensity to consume, MPC) como a derivada parcial do consumo em relação a renda presente:

$$\text{MPC}_t \equiv \frac{\partial \mathcal{C}_t^d}{\partial y_t}$$

- Suponha que a renda aumente *temporariamente* (i.e., y_1 aumenta mas y_2 fica igual). A MPC é:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_1^d}{\partial y_1} = \frac{1}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}} < 1$$

- Exatamente como Keynes conjecturou.

A Hipótese da Renda Permanente

- Suponha que a renda aumente *permanentemente*: y_1 e y_2 aumente na mesma proporção Δ:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_1^d}{\partial \Delta} = \frac{1 + \frac{1}{1+r}}{1 + \beta^{\frac{1}{\sigma}}(1+r)^{\frac{1}{\sigma}-1}} > \frac{\partial \mathcal{C}_1^d}{\partial y_1}$$

- Se $\beta(1+r) = 1$, a expressão simplifica para:

$$\frac{\partial \mathcal{C}_1^d}{\partial \Delta} = 1$$

- Que é próximo a evidência empírica dos dados agregados!

Reconciliando com os Dados

- A hipótese da renda permanente ajuda a reconciliar a evidência dos microdados (MPC <1) e dos dados agregados (MPC=1).
- **Microdados:** renda da família reflete renda corrente total que é uma combinação de renda transitória e permamente.
  - Famílias com renda temporária baixa vão ter c/y alto, enquanto famílias com renda temporária alta vão ter c/y baixo.
  - Logo, um aumento de y aumenta c em menor proporção (MPC<1)!
- **Dados agregados:** é a média da renda e do consumo de todas as famílias, algumas com renda temporária baixa e outras com alta.
  - Somando todas essas famílias por longos períodos de tempo, na média, faz com que o componente temporário desapareça.
  - Sobra apenas o componente permanente da renda (MPC=1)!

Resumo

- A função consumo é muito mais rica do que aparenta, depende da renda corrente, da renda futura e da taxa de juros.

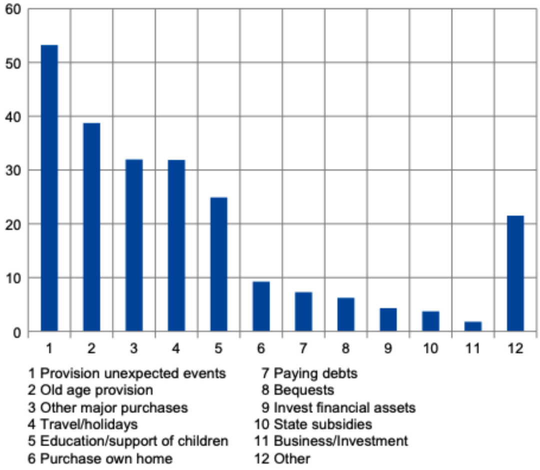
- No nosso exemplo simples:

$$\mathcal{C}_1^d(\underbrace{y_1}_{+}, \underbrace{y_2}_{+}, \underbrace{r}_{-})$$

- Isso ajuda a conciliar os microdados com os dados agregados.

Exemplos e Extensões

Razões para Poupar (Europa)



Fonte: European Central Bank.

Incerteza

- Vamos assumir que renda futura é incerta (podemos perder o emprego, ser promovido, etc).
- Considere que y_2 é uma variável aleatória com 2 estados da natureza:
  - $\bar{y}_2 + \epsilon$ com probabilidade p (estado bom).
  - $\bar{y}_2 - \epsilon$ com probabilidade $1 - p$ (estado ruim).

Incerteza

- Vamos assumir que renda futura é incerta (podemos perder o emprego, ser promovido, etc).
- Considere que y_2 é uma variável aleatória com 2 estados da natureza:
  - $\bar{y}_2 + \epsilon$ com probabilidade p (estado bom).
  - $\bar{y}_2 - \epsilon$ com probabilidade $1 - p$ (estado ruim).
- Consumo no segundo período, c_2, também é uma variável aleatória, já que depende da renda:
  - $c_2^B = \bar{y}_2 + \epsilon + (1 + r)(y_1 - c_1)$
  - $c_2^R = \bar{y}_2 - \epsilon + (1 + r)(y_1 - c_1)$
- O valor esperado do consumo será: $\mathbb{E}[c_2] = pc_2^B + (1 - p)c_2^R$.

Problema com Incerteza

- A família agora maximiza a **utilidade esperada** do consumo:

$$
\begin{aligned}
&\max_{c_1, c_2} \quad u(c_1) + \beta \mathbb{E}[u(c_2)] \\
\text{s.à} \quad & c_1 + \frac{c_2}{1+r} \leq y_1 + \frac{y_2}{1+r}
\end{aligned}
$$

- Resolvendo o problema, encontramos a Equação de euler:

$$
\begin{aligned}
u'(c_1) &= (1+r)\beta[pu'(c_2^B) + (1-p)u'(c_2^R)] \\
u'(c_1) &= (1+r)\beta \mathbb{E}[u'(c_2)]
\end{aligned}
$$

- A família escolhe o quanto poupar baseado na utilidade marginal *esperada* de c_2.

Poupança Precaucionária

- A incerteza altera a decisão de poupar? Suponha para simplificar $\beta(1+r) = 1$.
- No caso sem incerteza, a equação de Euler fica:

$$u'(c_1) = u'(c_2) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2$$

  - Consumo tem que ser igual nos dois períodos.
- No caso com incerteza:

$$u'(c_1) = \mathbb{E}[u'(c_2)]$$

- **Problema:** o valor esperado não necessariamente é igual entre $\mathbb{E}[u'(c_2)] \neq u'(c_2)$!!!

Digressão: Desigualdade de Jensen

- Uma função $f(x)$ é dita convexa se, para um $\alpha \in [0, 1]$ e dois pontos x_1, x_2, satisfaz:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$$

- Considere uma variável aleatória x que com probabilidade p seja x_1 e com $1-p$ seja x_2.
  - Neste caso, o valor experado de x é: $\mathbb{E}[x] = px_1 + (1-p)x_2$
  - Usando a definição de convexidade: $f(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[f(x)]$

- Para os casos gerais, essa é a chamda Desigualdade de Jensen.

Digressão: Desigualdade de Jensen

- Uma função $f(x)$ é dita convexa se, para um $\alpha \in [0,1]$ e dois pontos x_1, x_2, satisfaz:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

- Considere uma variável aleatória x que com probabilidade p seja x_1 e com $1-p$ seja x_2.
  - Neste caso, o valor experado de x é: $\mathbb{E}[x] = px_1 + (1-p)x_2$
  - Usando a definição de convexidade: $f(\mathbb{E}[x]) \leq \mathbb{E}[f(x)]$

- Para os casos gerais, essa é a chamda Desigualdade de Jensen.
  - Lembre-se que no nosso caso simples: $\mathbb{E}[c_2] = pc_2^B + (1-p)c_2^R$
  - A chave está na convexidade da **utilidade marginal**: $u'(c_2)$.

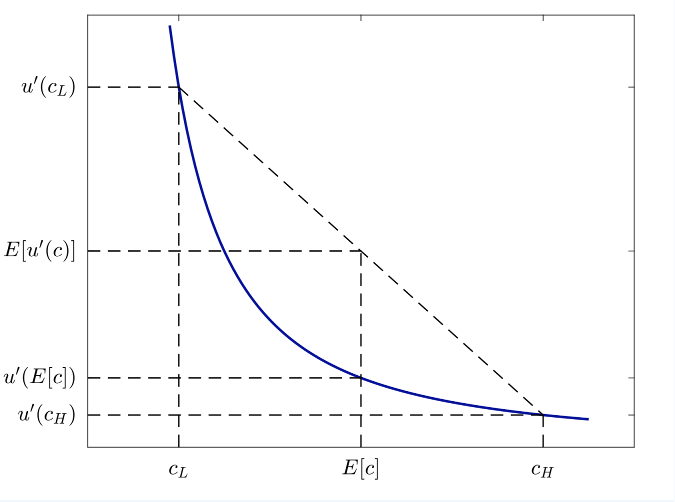
Convexidade da Utilidade Marginal

- Em geral, assumimos que a utilidade é côncava ($u''() < 0$), o que nos interessa é a **utilidade marginal**.
  - $u''() < 0$ significa que a utilidade marginal é decrescente.
  - $u'''() > 0$ significa que a utilidade marginal é convexa.

- Se a terceira derivada da utilidade for (estritamente) crescente, a utilidade marginal será (estritamente) convexa e:

$$\mathbb{E}[u'(c_2)] > u'(\mathbb{E}[c_2]) = u'(\mathbb{E}[y_2 + (1+r)a]) = \underbrace{u'(\overline{y}_2 + (1+r)a) = u'(c_1)}_{\text{EE do caso sem incerteza!}}$$

Utilidade Marginal Esperada



Fonte: Kurlat.

Poupança Precaucionária

- Sem incerteza, a família irá consumir $c_2 = \mathbb{E}[c_2]$ e receber a utilidade marginal $u'(\mathbb{E}[c_2])$.
- Com incerteza, irá consumir c_2^B ou c_2^R e receber $\mathbb{E}[u'(c_2)]$.
- Se $u'''(c) > 0$ temos $\mathbb{E}[u'(c_2)] > u'(\mathbb{E}[c_2])$ e a incerteza aumenta a utilidade marginal esperada de c_2.
  - Como a utilidade marginal esperada do período 2 é maior, $u'(c_1)$ tem que ser maior para que a equação de euler seja satisfeita.
  - Isso aumenta a propensão a poupar: $\uparrow u'(c_1)$, $\downarrow c_1$ e $\uparrow a$!
- O incentivo a poupar dado pela incerteza é chamado de **poupança precaucionária**.

Convexidade da Utilidade Marginal

- Poupança precaucionária nesta classe de modelos requer $u'''() > 0$. Essa propriedade é chamada de **prudência**
- Quais utilidades satisfazem essa propriedade?
  - CRRA: $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$.

$$u'(c) = c^{-\sigma} \qquad u''(c) = -\sigma c^{-(1+\sigma)} \qquad u'''(c) = \sigma(1+\sigma)c^{-(2+\sigma)} \qquad \checkmark$$

  - Utilidade quadrática: $u(c) = c - \theta\frac{c^2}{2}$.

$$u'(c) = 1 - \theta c \qquad u''(c) = -\theta \qquad u'''(c) = 0 \qquad \times$$

Mais do que Dois Períodos

- Em muitos modelos mais avançados encontramos problemas com mais que 2 períodos.
  - Alguns inclusive com tempo infinito: $T = \infty$!
- A utilidade da família depende de toda a sequência de consumo, $\{c_0, c_1, ..., c_T\} = \{c_t\}_{t=0}^{T}$:

$$U(c_0, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

  - Note que $0 < \beta < 1$ e a família prefere consumir hoje do que amanhã.

Mais do que Dois Períodos

- Em muitos modelos mais avançados encontramos problemas com mais que 2 períodos.
  - Alguns inclusive com tempo infinito: $T = \infty$!
- A utilidade da família depende de toda a sequência de consumo, $\{c_0, c_1, ..., c_T\} = \{c_t\}_{t=0}^{T}$:

$$U(c_0, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

  - Note que $0 < \beta < 1$ e a família prefere consumir hoje do que amanhã.
- Em cada período teremos uma restrição orçamentária.

$$c_t + a_{t+1} = y_t + (1 + r)a_t \qquad \text{onde } t = 0, ..., T$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Vamos substituir as restrições orçamentárias de cada período e encontrar **restrição orçamentária intertemporal**. Começando por $t = 0$ e $t = 1$:

$$a_1 = y_0 - c_0 + (1+r)a_0$$
$$a_2 = y_1 - c_1 + (1+r)a_1$$

- Substituindo a_1:

$$a_2 = y_1 - c_1 + (1+r)(y_0 - c_0) + (1+r)^2 a_0$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Vamos substituir as restrições orçamentárias de cada período e encontrar **restrição orçamentária intertemporal**. Começando por $t = 0$ e $t = 1$:

$$a_1 = y_0 - c_0 + (1+r)a_0$$
$$a_2 = y_1 - c_1 + (1+r)a_1$$

- Substituindo a_1:

$$a_2 = y_1 - c_1 + (1+r)(y_0 - c_0) + (1+r)^2 a_0$$

- De maneira similar, a restrição do período 2:

$$\begin{aligned} a_3 &= y_2 - c_2 + (1+r)a_2 \\ &= y_2 - c_2 + (1+r)(y_1 - c_1) + (1+r)^2(y_0 - c_0) + (1+r)^3 a_0 \end{aligned}$$

- Logo a restrição do período T pode ser escrita:

$$a_{T+1} = \sum_{t=0}^{T} y_t(1+r)^{T-t} - \sum_{t=0}^{T} c_t(1+r)^{T-t} + (1+r)^{T+1} a_0$$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- Re-arrumando a equação anterior, temos:

$$\frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} + \underbrace{\sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t}}_{\text{valor presente do consumo}} = \underbrace{\sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} + (1+r)a_0}_{\text{valor presente da renda}}$$

- A equação é muito parecida com a restrição orçamentária intertemporal de 2 períodos.
- O $(1+r)a_0$ é apenas a poupança/dívida inicial. Antes assumimos que $a_0 = 0$.
- Iremos assumir que $a_{T+1} \geq 0$ (a família não pode morrer endividada). Como não é ótimo ela "morrer com dinheiro no banco", temos $a_{T+1} = 0$

Restrição Orçamentária Intertemporal

- E se $T = \infty$?

- Caso não haja nenhuma restrição em a_{T+1}, o ótimo para a família é se endividar eternamente para consumir mais.

- Para evitar essa situação, normalmente assumimos que

$$\lim_{T \to \infty} \frac{a_{T+1}}{(1+r)^T} > 0$$

- Isso é chamado de **condição no-Ponzi**, já que impede que as famílias façam esquemas Ponzi.

Problema da Família

- Independentemente se T for finito ou infinito, o problema da família é:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{T}} \quad \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t)$$

$$\text{s.à} \quad \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} + (1+r)a_0$$

- Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(c_0, c_1, ..., \lambda) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) + \lambda \left(\sum_{t=0}^{T} \frac{y_t}{(1+r)^t} + (1+r)a_0 - \sum_{t=0}^{T} \frac{c_t}{(1+r)^t} \right)$$

- C.P.O para dois períodos arbitrários t e $t+1$:

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda \frac{1}{(1+r)^t} \qquad \text{e} \qquad \beta^t u'(c_{t+1}) = \lambda \frac{1}{(1+r)^{t+1}}$$

Mais do que Dois Períodos

- Juntando as CPOs encontramos a Equação de Euler:

$$u'(c_t) = (1+r)\beta u'(c_{t+1}) \qquad \text{para todo } t = 0, 1..., T$$

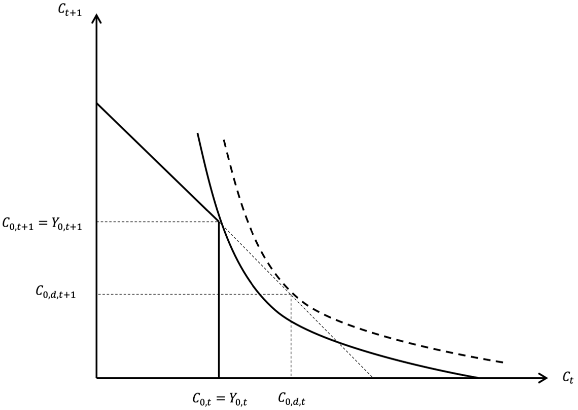
- A equação representa o trade-off entre consumir e poupar em dois períodos arbitrários.
- A intuição econômica é a mesma que antes, então acrescentar mais períodos não faz muita diferença.
- Em geral, é útil para incorporar modelos de ciclo de vida ou tempo infinito.

Restrições de Empréstimo

- Nos modelos anteriores assumimos que as famílias podem pegar empréstimos livremente. Na realidade, muitas famílias não tem acesso à crédito.
- Podemos introduzir imperfeições no mercado de crédito no modelo:
  (i) Colocando uma restrição na quantidade de empréstimo da família;
  (ii) Colocando um "spread" bancário na taxa de juros;
- Suponha que a família não possa se endividar: $a \geq 0$.
- Como isso altera a decisão de consumir?
  - Primeiro veremos gráficamente, depois matematicamente.

Restrições de Empréstimo

Figura: Família gostaria de consumir mais que y_1



Fonte: GLS.

- $a \geq 0$ gera uma "dobra" na restrição orçamentária.
- c_1 pode ser no máximo y_1.
- Caso que ele queira consumir mais que y_1 não irá conseguir, e portanto terá uma utilidade menor do que o caso sem restrição de crédito.
- Caso queira consumir menos que y_1 a restrição de crédito não irá fazer diferença.

Problema da Família com Restrições de Crédito

- Por causa da restrição de crédito, temos que escrever explicitamente as restrições orçamentárias período por período. O problema é:

$$
\begin{aligned}
\max_{c_1, c_2, a} \quad & u(c_1) + \beta u(c_2) \\
\text{s.à} \quad & c_1 + a = y_1 \\
& c_2 = y_2 + (1 + r)a \\
& a \geq 0
\end{aligned}
$$

- Três restrições, sendo uma delas com desigualdade.

- Iremos utilizar as Condições de Karush-Kuhn-Tucker.
  - É uma generalização do método de Lagrange que nos permite lidar com restrições de desigualdade que podem ou não estar ativas (e.g. $a \geq 0$).

Problema da Família com Restrições de Crédito

- O Lagrageano do problema:

$$\mathcal{L}(c_1, c_2, a) = u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda_1 \left(y_1 - c_1 - a\right) + \lambda_2 \left(y_2 - c_2 + (1+r)a\right) + \mu a$$

  - onde λ_1, λ_2, $\mu \geq 0$ são os multiplicadores de KKT.

- Condições de KKT para otimalidade requer: $a\mu = 0$ (folga complementar), e as CPO:

$$u'(c_1) = \lambda_1, \qquad \beta u'(c_2) = \lambda_2 \qquad \lambda_1 = \lambda_2(1+r) + \mu$$

- Substituindo λ_1 e λ_2, encontramos a equação de Euler:

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2) + \mu$$

Problema da Família com Restrições de Crédito

- O que quer dizer esse termo extra na direita??

$$u'(c_1) = \beta(1 + r)u'(c_2) + \mu$$

- Lembre-se das condições de KKT extras: $a \geq$, $\mu \geq 0$ e $a\mu = 0$:
  - Quando $\mu = 0$ a restrição está inativa, e temos que $a > 0$ ou $a = 0$ e a equação de Euler fica igual a anterior.
  - Quando $\mu > 0$, a restrição está ativa e $a = 0$. Neste caso a família gostaria de pegar emprestado para consumir mais, mas não pode!

Problema da Família com Restrições de Crédito

- O que quer dizer esse termo extra na direita??

$$u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2) + \mu$$

- Lembre-se das condições de KKT extras: $a \geq$, $\mu \geq 0$ e $a\mu = 0$:
  - Quando $\mu = 0$ a restrição está inativa, e temos que $a > 0$ ou $a = 0$ e a equação de Euler fica igual a anterior.
  - Quando $\mu > 0$, a restrição está ativa e $a = 0$. Neste caso a família gostaria de pegar emprestado para consumir mais, mas não pode!

- Como $\mu > 0$, podemos dizer que: $u'(c_1) > \beta(1+r)u'(c_2)$

- A utilidade marginal de $u'(c_1)$ é muito alta, ou seja, c_1 está muito baixo.

- Uma família restrita ao crédito não reage a mudançcas da renda futura e não consegue fazer substituição intertemporal!