Análise Macro I
Lista de Exercícios 4

1. **(Restrição Orçamentária no Tempo Contínuo).** Considere um consumidor em tempo contínuo que pode poupar a uma taxa de juros constante r, recebe um salário determinístico mas *time-varying*, w_t, e escolhe uma taxa de consumo c_t.

   (a) Escreva a restrição orçamentária em um intervalo tempo $[t, t+\Delta t]$ dado o estoque de ativos a_t. Ao contrário do que fizemos na aula, suponha que o consumo e o salário sejam retirados do estoque de ativos no final do intervalo de tempo (ou seja, em $t+\Delta t$) e não no início (em t).

   (b) Desta equação, derive a restrição orçamentária em forma diferencial, isto é, encontre $\dot{a}_t = da/dt$.

   (c) Explique por que essa é a mesma restrição orçamentária derivada na aula.

2. **(Modelo de Ben Porath).** Considere o problema de acumulação de capital humano no ciclo de vida de um indivíduo. O indíviduo dispõe de um unidade de tempo que pode ser usado para trabalhar no mercado ou para acumular capital humano. Suponha que h_t seja o capital humano do indivíduo na idade t, e que n_t é o tempo dedicado para acumular capital humano. A função de produção utilizada para acumular capital humano é dada por $f(h_t, n_t) = (h_t n_t)^\alpha$, onde $\alpha \in (0,1)$. Logo, a lei de movimento do capital humano é:

$$\dot{h} = (h_t n_t)^\alpha - \delta h_t,$$

   onde δ é a taxa de depreciação do capital humano. Seja a renda do indivíduo como $wh_t(1-n_t)$, onde w é o salário em unidades de capital humano, o indivíduo escolhe a função n_t para maximizar o valor presente de sua renda permanente (i.e. a renda total entre a idade 0 e T anos). O problema do agente é dado por:

$$\begin{aligned} &\max_{n_t} \int_0^T e^{-rt}[wh_t(1-n_t)]dt + e^{-rT}V_T(h_T), \\ s.t. \quad &\dot{h} = (h_t n_t)^\alpha - \delta h_t, \\ &n_t \in [0,1] \quad \text{e} \quad h_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

   onde r é a taxa de desconto. Suponha a condição terminal $V(h_T) = 0$ (capital humano não tem valor na aposentadoria!).[1]

[1] O Modelo de Ben-Porath (1967) é utilizado tanto na macroeconomia, para computar o estoque de capital humano entre paises (Manuelli e Seshadri (2014), Erosa et al (2010)), quanto em economia do trabalho, como fundamentação teórica para a equação minceriana.

(a) Defina o Hamiltoniano do problema e escreva as condições necessárias do Princípio Máximo de Pontryagin (defina o coestado associado como μ_t).

(b) Suponha que n_t seja interior em todo $t \in [0, T)$ (i.e. $0 < n_t < 1$). Mostre que o coestado é dado por[2]

$$\mu_t = \frac{w}{r+\delta} m_t, \quad \text{onde } m_t = (1 - e^{-(r+\delta)(T-t)}),$$

o investimento em capital humano é dado por

$$n_t h_t = \left(\frac{\alpha}{r+\delta} m_t \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Inteprete brevemente. O coestado é crescente ou decrescente com a idade? Como o capital humano evolui durante o ciclo de vida do indivíduo (observe $\dot{h}_t$)? Como isso é relacionado com o benefício e o custo marginal de aumentar o capital humano?

3. **(Problema de poupança de Merton)**. Considere uma família com ativos iniciais $a_0 > 0$ que podem investir a uma taxa de juros r. Tempo é contínuo e infinito. A família não tem nenhuma outra fonte de renda aparte da poupança, e maximiza:

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} dt$$

onde $\gamma > 0$ e $\rho > 0$. A equação HJB para este problema é:

$$\rho V(a) = \max_{c \geq 0} \left\{ \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma} + (ra - c) V'(a) \right\}.$$

Iremos supor que a função valor herda a forma da função utilidade: $V(a) = Ba^{1-\gamma}/(1-\gamma)$, onde B é um coeficiente indeterminado.[3]

(a) Mostre que uma função valor deste tipo é uma solução para a HJB. Encontre o coeficiente B.

(b) Encontre a regra de consumo ótima e interprete-a (ou seja, faça a estática comparativa em relação aos parâmetros: como as mudanças de ρ, γ e r alteram a taxa de consumo *ceteris paribus*? Distinga entre diferentes casos de γ se necessário.)

[2] *Dica*: para resolver a pergunta você terá que resolver uma equações diferencial de primeira ordem não homogêneas. A solução geral de uma equação diferencial linear do tipo $y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$ é dada por $y(t) = [\int_{t_0}^t u(s)f(s)ds + C]/u(t)$, onde $u(t)$ é o fator de integração $u(t) = \exp(\int_{t_0}^t a(s)ds)$, e C é uma constante arbitrária. Utilize a condição inicial/terminal para encontrar a constante.

[3] O problema original de Merton considera a escolha de portfólio entre um ativo de risco (ações) e um ativo livre de risco (títulos); o método de coeficientes indeterminados também funciona neste caso desde que a renda seja proporcional à riqueza.

4. **(Crescimento com processo Poisson)**. Considere um modelo de crescimento em tempo contínuo com a função de produção:

$$y_t = A_t k^\alpha,$$

onde $\alpha \in (0, 1)$ e $A_t \in \{A_1, A_2, ...A_N\}$. A_t segue um processo Poisson com taxa de transição entre os estados dado por $\eta_{ij} > 0$, para i, $j \in \{1, ..., N\}$, $i \neq j$. Acumulação de capital segue:

$$\dot{k}_t = y_t - c_t - \delta k_t,$$

onde $c_t \geq 0$ é o consumo em t. O planejador social maximiza a utilidade:

$$\mathbb{E}_0 \int_0^T e^{-\rho t} \ln(c_t) + e^{-\rho T} W(k_T) dt,$$

onde $\rho > 0$ é a taxa de desconto, e $W(k_T)$ uma função estritamente crescente e diferenciável.

(a) Escreva a função valor de um intervalo de tempo arbitrário Δt. Derive a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman.

(b) Encontre a condição de primeira ordem para a escolha de consumo ótimo e interprete-a brevemente

(c) Para uma função arbitrária $f(t, k_t, A_t)$ diferenciável em k_t e t, derive o *infinitesimal generator*

$$\mathcal{A}f = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbb{E} \left[\frac{f(t + \Delta t, k_{t+\Delta t}, A_{t+\Delta t}) - f(t, k_t, A_t)}{\Delta t} \right].$$

(d) Escreva a equação de Euler e a HJB para o caso $T = \infty$.