Macroeconomia I
Lista de Exercícios 3

1. **(Equilíbrio Recursivo com Tributação).** Considere uma economia de horizonte infinito com um continuum de indivíduos indexados por $i \in [0, 1]$. A restrição orçamentária da família i é:

$$c_t^{(i)} + k_{t+1}^{(i)} = (1 - \tau) A k_t^{(i)},$$

ou seja, cada indivíduo possui uma tecnologia linear no próprio capital, $k_t^{(i)}$. A produção é tributada a uma taxa τ. Os indivíduos podem usar sua receita líquida da produção para consumo, $c_t^{(i)}$, ou para investimento, $k_{t+1}^{(i)}$. O capital se deprecia totalmente após o uso. Os gastos do governo $G_t > 0$ seguem um processo de Markov de primeira ordem. O governo equilibra seu orçamento em cada período, ou seja, ele escolhe τ_t em cada t para satisfazer:

$$\tau_t A K_t = G_t,$$

onde K_t é o capital agregado.[1] Indivíduos têm expectativas racionais sobre a tributação futura, e suas preferências são definidas como:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^{(i)}),$$

onde u satisfaz as suposições usuais.

(a) Planejador social:

i. Escreva a restrição de recursos no tempo t de um planejador social que escolhe a sequência de variáveis agregadas $\{C_t, K_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ e considera a sequência estocástica $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ como dada.

ii. Escreva a equação de Bellman para esse planejador social (lembre-se do governo).

iii. A partir da equação de Bellman, encontre a equação de Euler para o problema do planejador social (suponha que as condições de regularidade usuais são satisfeitas).

(b) Equilíbrio Competitivo Recursivo (RCE):

i. Escreva a equação de Bellman para um indivíduo i.

ii. Encontre a equação de Euler do indíviduo no RCE.

(c) Compare as equações de Euler do problema do planejador social e do problema do indivúduo e discuta se a acumulação de capital é eficiente no RCE, ou se está abaixo ou acima do nível eficiente.

[1] Suponha que K_0 é suficientemente grande para que, em equilíbrio, seja sempre possível para o governo pagar suas contas.

2. (***Contractive linear mappings***).

   (a) Considere uma firma que, a cada período, obtém lucro determinístico π e desconta a uma taxa $\beta = 1/(1+r)$. Escreva um operador T, $T : X \to X$, que nos diga o valor da empresa em V_t no período t, dado que sabemos o valor da empresa em V_{t+1}. Usando propriedades deste operador, mostre que o valor da empresa deve ser

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi = \frac{\pi}{1-\beta}.$$

   (b) Suponha agora que o lucro da firma é estocástico e depende do estado da natureza $\{s_i\}_{i=1}^n$, onde lucro em cada estado é definido por $\pi_1, \pi_2, ...\pi_n$. A transição entre os estados da natureza segue um processo de Markov, ou seja, o estado atual determina a distribuição de probabilidade no próximo período:

$$P(s_{t+1} = s_i | s^t = (s_1, ..., s_j)) = P(s_{t+1} = s_i | s_t = s_j) = p_{ji},$$

   onde p_{ji} são os elementos da matriz de transição $P_{n\times n}$. Escreva um operador $T : X \to X$ que faz um mapa do vetor do valor da firma nos diferentes estados em $t+1$, $V_{t+1} = [V_{t+1}(s_1), ..., V_{t+1}(s_n)]$ para um vetor V_t. Usando as propriedades deste operador, mostre que existe um único vetor V e diga como esse vetor pode ser calculado.

   (c) Suponha agora que os estados da natureza são caracterizados por um continuum $s_t \in [0, 1]$ e com função de lucro associada: $\pi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, que é contínua e estritamente crescente em s. Considere o seguinte operador:

$$V_t(s) = TV_{t+1}(s) = \pi(s) + \beta \int_0^1 P(s, r)V_{t+1}(s)dr$$

   onde $P(s, r)$ é uma função contínua definida em $[0, 1] \times [0, 1]$, e $\int_0^1 P(s, r)dr = 1$ para todo $s \in [0, 1]$. Intuitivamente, $P(s, r)$ é a função densidade de probabilidade de $r = s_{t+1}$ condicional em s_t. Mais uma vez, mostre que existe uma função única V e diga como podemos calculá-la (ou aproximá-la).

3. **(Crescimento com Depreciação Estocástica)**. Considere uma economia onde o único bem final é produzido de acordo com a função de produção $y_t = F(k_t)$, onde k_t é o capital. O agente representativo escolhe a sequência de consumo de acordo com as preferências:

$$\mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right],$$

   onde $\beta \in (0, 1)$ and $u(.)$ tem as propriedades usuais. O bem final pode ser usado para consumo, $c_t \geq 0$, ou investimento, $i_t \geq 0$. A lei do movimento do capital é estocástica e segue:

$$k_{t+1} = k_t(1 - z_{t+1}) + i_t,$$

   onde $z_{t+1} \in (0, 1)$ é uma variável aleatória que segue um processo Markov de primeira ordem.

(a) Descreva o problema do planejador social benevolente em forma de Programação Dinâmica: Quais são as variáveis estado, as variáveis controle, a lei do movimento do estado, o conjunto factível do controle, e a função retorno. Escreva a equação de Bellman.

(b) Suponnha que z_t segue um processo *iid*: encontre as variáveis estado e escreva a equação de Bellman.

(c) Suponnha que z_t segue uma cadeia de markov de *segunda ordem*: encontre as variáveis estado e escreva a equação de Bellman.

4. **(Markov-perfect Equilibrium)**. Considere o *cake-eating problem* de um agente com bolo x_0 (imagine que o bolo é um recurso esgotável como a floresta Amazônica). Todo período, o agente come uma parte do bolo: $x_{t+1} = R(x_t - c_t)$, onde $c_t > 0$ é o consumo e $R > 0$ a taxa bruta de crescimento do bolo (ou reflorestamento). O agente escolhe a sequência de consumo que maximiza a utilidade total:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(c_t),$$

onde $\beta \in (0, 1)$.

(a) Escreva a equação de Bellman para o agente. Suponha que a equação de Bellman tenha a forma $V(x) = C + D \ln x$. Utilize o método dos coeficientes indeterminados e encontre os coeficientes C, D e a regra de decisão $c^*(x)$.

(b) *Markov-perfect Equilibrium*. Suponha agora que existem *dois* agentes que comem o bolo. Cada período, eles decidem quanto com do bolo. A lei do movimento agora é:

$$x_{t+1} = R(x_t - c_t^1 - c_t^2),$$

onde c^i é o consumo do agente $i \in (1, 2)$. Ambos os agentes têm utilidade logarítmica e descontam o futuro por β. Iremos procurar um *Markov-perfect Equilibrium* (MPE), um par de estratégicas simétricas $c^1(x) = c^2(x)$ onde cada agente responde de forma ótima às decisões do outro agente.[2]

i. Escreva a equação de Bellman que caracteriza o problema do jogador 1. Considere a estratégia (a regra de decisão) do jogador 2 $c^2(x)$ como uma função continuamente diferenciável. A partir da equação de Bellman, encontre a equação de Euler (generalizada) do agente 1 e interprete-a brevemente.

ii. Encontre o MPE simétrico (Dica: suponha que $c^1 = c^2$ e utilize o método dos coeficientes indeterminados para encontrar a regra de decisão $c^{1,*}(x) = c^{2,*}(x)$).

iii. Como a taxa de extração (consumo do bolo) difere do caso de um só jogador?

iv. A alocação no jogo de dois jogadores é eficiente? Comente brevemente (não precisa utilizar argumentos matemáticos).

5. **(“Codando” o Modelo de Crescimento Estocástico**.) **[Não precisa entregar]**. Modifique o programa do modelo de crescimento determinístico (com tempo infinito) para acomodar produtividade estocástica. Suponha que a função de produção é dada por $y_t = A_t k_t^{\alpha}$, onde a produtividade total do fator, A_t, segue uma cadeia de Markov com dois estados: $A_t \in \{1-a, 1+a\}$, e $Prob(A_{t+1} = A_t) = p$. Suponha inicialmente que $a = 0.05$ e $p = 0.8$.

[2] No MPE, os agentes condicionam sua estratégia apenas ao estado relevante para o *payoff*, neste caso x.

(a) Utilize *Value Function Iteration* e *grid search* para encontrar a função valor numericamente. Mostre as funções valor $V(k_i, A_1)$ e $V(k_i, A_2)$ em um gráfico.

(b) Como os resultados mudam se: $a = 0.01$, $a = 0.1$, $p = 0.5$ e $p = 0.95$ (faça uma mudança de cada vez). Comente.

(c) Em qual sentido existe um Estado Estacionário agora? Como poderiamos encontrá-lo? Descreva brevemente (Dica: lembre-se que a dada certas condições a cadeia de Markov tem uma distribuição estacionária única).