

Análise Macro I

Lista de Exercícios 1

1. **(Constant Relative Risk Aversion Utility Function)**. A função utilidade instantânea mais utilizada em modelos macroeconômicos é a utilidade isoelástica (também conhecida CRRA utility function):

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, \quad \sigma \geq 0 \text{ e } \sigma \neq 1.$$

Para as questões (c) em diante considere também dois períodos com desconto $0 < \beta < 1$:

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2),$$

- (a) Demonstre que se $\sigma = 1$, então $u(c) = \ln c$ (dica: utilize a regra de L'Hôpital).
- (b) Defina $\sigma(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)}$ como o coeficiente de Arrow-Pratt de aversão relativa ao risco. Logo $\sigma(c)$ indica a atitude do indivíduo em relação ao risco. Quanto maior é $\sigma(c)$, maior a aversão ao risco. Mostre que σ é constante.
- (c) Seja a taxa marginal de substituição entre dois períodos como:

$$MRS(c_2, c_1) = \frac{\partial U / \partial c_2}{\partial U / \partial c_1}.$$

A função u é homotética se $MRS(c_2, c_1) = MRS(\gamma c_2, \gamma c_1)$. Mostre que U é homotética.

- (d) Defina a elasticidade de substituição intertemporal como:¹

$$ies(c_t, c_{t+1}) = -\frac{d(c_{t+1}/c_t)}{dMRS(c_{t+1}, c_t)} \frac{MRS(c_{t+1}, c_t)}{c_{t+1}/c_t}$$

Mostre que $ies(c_1, c_2) = 1/\sigma$.²

- (e) **Bônus (não precisa entregar)**: refaça todos os exercícios com uma utilidade CARA (Constant Absolute Risk Aversion): $u(c) = 1 - \exp\{-\sigma c\}$. Verifique que certas condições acima não são satisfeitas.

2. **(Método de Negishi)**. Considere a economia de trocas com dois agentes. A função utilidade para um agente $i = 1, 2$ é dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log c_t^i. \quad (1)$$

¹A elasticidade de substituição intertemporal é definida como a variação percentual na taxa de crescimento do consumo em resposta a uma variação percentual na taxa de juros real. Note que a taxa de juros é o preço intertemporal do consumo, e que no ótimo (equação de euler) é igual a MRS .

²Esta relação entre a elasticidade de substituição intertemporal e o coeficiente de aversão ao risco não é geral. Existem preferências em que as duas variáveis não são relacionadas (por exemplo, *Epstein-Zin preferences*).

Em cada período os agentes recebem dotações e_t^i determinadas pela seguinte regra:

$$e_t^1 = \begin{cases} \hat{e}, & \text{se } t \text{ é par;} \\ 0, & \text{se } t \text{ é ímpar;} \end{cases} \quad e_t^2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t \text{ é par;} \\ \hat{e}, & \text{se } t \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (2)$$

A dotação pode ser transformada em bem de consumo final sem custo: $c_t = \hat{e}$. O objetivo do problema é encontrar as alocações ótimas utilizando o método de Negishi.³

- (a) Seja α^i o peso dado pelo planejador social para o agente i (onde $\sum_{i=1}^2 \alpha^i = 1$). Defina e resolva o problema do planejador social para esta economia. Interprete as condições de primeira ordem. Como o planejador escolhe dividir os recursos da economia (intertemporalmente e entre agentes)?
 - (b) Qual é o conjunto de alocações Pareto eficiente desta economia?
 - (c) Queremos encontrar a alocação Pareto eficiente que descentraliza um equilíbrio competitivo. Determine que o preço de uma unidade de consumo p_t seja igual ao multiplicador de Lagrange da restrição de recursos da economia (normalize $p_0 = 1$). Defina uma função de transferência em função dos pesos, $t^i(\alpha^i)$, onde t é a transferência que cada agente necessita para conseguir comprar a alocação eficiente dado a sua sequência de dotações $\{e^i\}_{t=0}^\infty$.
 - (d) Explique brevemente e intuitivamente porque a transferência que implementa o equilíbrio competitivo é igual $t^i(\alpha) = 0$ para todo i . Encontre o peso α que determina o equilíbrio competitivo.
3. **(Modelo de Crescimento Neoclássico com Trocas no Período 0)**. Considere o modelo de crescimento neoclássico. Existe uma família representativa com massa unitária. Não há crescimento populacional. A função utilidade é dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^\infty) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma},$$

com k_0 dado. O bem final que pode ser consumido ou investido é produzido utilizando a seguinte função de produção $y_t = k_t^\alpha n_t^{1-\alpha}$. A acumulação de capital é dada pela seguinte lei de movimento:

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + i_t.$$

- (a) Descreva o problema da família e das empresas em uma estrutura de mercado Arrow-Debreu (trocas no período 0).
- (b) Caracterize o equilíbrio: resolva os problemas e interprete as soluções. Escreva o sistema de equações de diferenças que caracterizam a solução desta economia (incluindo condições iniciais e finais).
- (c) Defina um equilíbrio competitivo para esta economia.

³Dica: veja a seção 2.2.4 das notas do DK e/ou a seção 7.5.2 das notas do PK.

4. **(Uma Economia com Dois Setores).** Considere a seguinte economia. A família representativa tem função utilidade:

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+\rho)^t} u(c_t), \quad \rho > 0.$$

Onde $u(\cdot)$ é estritamente crescente, estritamente côncava, diferenciável, limitada com $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c) = \infty$. A família é dotada de uma unidade de tempo.

A economia é composta por dois setores, um para a produção de bens de consumo e outro para a produção de bens de investimento. A tecnologia do setor de bens de consumo é

$$c_t = Ak_{c_t}^{\theta} n_{c_t}^{1-\theta}, \quad 0 < \theta < 1.$$

A tecnologia do setor de bens de investimento é

$$x_t = Bk_{x_t}^{\phi} n_{x_t}^{1-\phi}, \quad 0 < \phi < 1.$$

A tecnologia de acumulação de capital é

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + x_t, \quad 0 < \delta < 1,$$

e as restrições de viabilidade da economia (*feasibility constraints*) são:

$$n_{c_t} + n_{x_t} \leq 1 \quad \text{e} \quad k_{c_t} + k_{x_t} \leq k_t.$$

Suponha que a família é dona do estoque de capital e vende os serviços do capital e do trabalho, cujos preços em termos do bem de consumo no período t são dados por r_t e w_t , respectivamente. O preço do bem de investimento em termos do bem de consumo no período t é q_t . Após receberem a renda dos fatores, as famílias decidem quanto consumir e investir. As famílias nascem com capital inicial k_0 .

- Defina cuidadosamente o problema da família e o problema das empresas (em ambos os setores) em um ambiente de mercado sequenciais.
- Defina um equilíbrio competitivo para esta economia.
- Defina o problema de otimização intertemporal resolvido por um planejador central benevolente para esta economia.
- Obtenha e interprete as condições necessárias de primeira ordem para este problema.
- Especifique um conjunto de equações que caracterizam as quantidades de equilíbrio no estado estacionário. (Dica: este sistema de equações envolve as quantidades no estado estacionário c , x , k_c , k_x , k , n_c e n_x , e os preços no estado estacionário r , q e w .)
- Especifique um algoritmo para calcular as quantidades c , x , k_c , k_x , k , n_c e n_x , e os preços r , q e w no estado estacionário. Não é necessário resolver o problema algebricamente.