Macroeconomia I

Overlapping Generations Model

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Em diversas situações supor um agente representativo não é o ideal.
- Uma maneira de modelar heterogeneidade é incluir diferentes "gerações" na economia:
  - Famílias não vivem período infinitos;
  - Novas famílias nascem com o tempo;
  - Velhos e jovens vivem no mesmo espaço econômico.
- Novas interações econômicas: decisões dos mais velhos afetam os preços enfretados pelas gerações jovens.
- Base de modelos quantitativos para estudar previdência, capital humano, desigualdade de renda/riqueza, etc (modelos com $N-$gerações).
- Vamos estudar o caso analítico: 2 gerações.

Referências

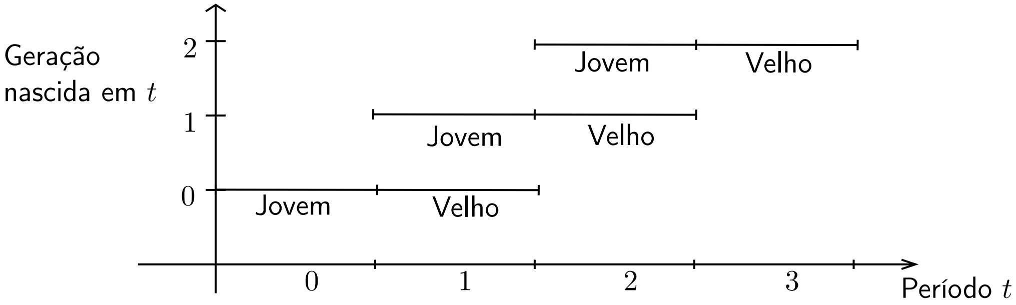
- Acemoglu Cap. 8.
- Notas do Dirk Krueger Cap. 8.

Introdução

- Tempo discreto; agentes vivem por 2 períodos.
- Geração nascida em t, vive dois períodos $a = 1,\ 2.$ Utilidade da vida:

$$u(c_t^1, c_{t+1}^2) = u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)$$

- Cada período existem duas gerações vivendo na economia:



Introdução

Abordagem:

- **Samuelson:** OLG com dotação e trocas (sem produção).
  - usado para demonstrar a necessidade de dinheiro em uma economia não-eficiente.
- **Diamond:** OLG com produção.
  - usado para estudar acumulação de capital e crescimento em uma economia não-eficiente.

Vamos focar apenas no modelo com produção.

Modelo OLG (com produção)

Environment, Tecnologia e Preferências

- Tempo discreto; agentes vivem dois períodos.
- Utilidade segue as preferências usuais (crescente, côncava, inada) e $\beta \in (0, 1)$.
- Quando jovem (período 1), eles ofertam uma unidade de trabalho para o mercado e recebem salário w_t. Decidem consumo e poupança.
- Quando velhos (período 2) consomem a poupança (remunerada pela taxa de juros r_{t+1}).
- População cresce a taxa n. Tamanho da geração nascida no período t:

$$L_t = (1 + n)^t L_0$$

onde L_0 é o tamanho da geração inicial (de velhos).

Environment, Tecnologia e Preferências

- Produção é representada pela função de produção agregada com retornos constante a escala

$$Y_t = F(K_t, L_t)$$

onde $F(.)$ satisfaz as suposições usuais (Inada, retornos marginais decrescentes).

- Defina variáveis por trabalhador: $y_t = Y_t/L_t$ e $k_t = K_t/L_t$:

$$y_t = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) \equiv f(k_t)$$

- Mercado de fatores é competitivo:

$$\begin{aligned} r_t &= F_k(K_t, L_t) = f'(k_t) \\ w_t &= F_l(K_t, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

Decisão de Consumo

- Problema de uma geração nascida em $t \geq 1$:

$$\max_{c_t^1 \geq 0,\ c_{t+1}^2 \geq 0,\ s_t} \quad u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & c_t^1 + s_t \leq w_t, \\ & c_{t+1}^2 \leq (1 + r_{t+1} - \delta) s_t \end{aligned}$$

- Suponha que a geração de velhos inicial nasce com capital inicial k_1:

$$\max_{c_1^2 \geq 0} u(c_1^2)$$

$$s.t. \quad c_1^2 \leq (1 + r_1 - \delta) k_1,$$

Decisão de Consumo

Timing:

1. Início do período t: produção ocorre com o trabalho dos jovens e capital dos velhos. Jovens recebe salário e velhos juros.
2. Final do período t: jovens decidem consumo e poupança. Velhos consomem a poupança. Poupança ocorre na forma de capital (único ativo da economia).
3. Entre t e $t+1$: Velhos morrem, jovens ficam velhos e uma nova geração nasce.

Equação de Euler

- Resolvendo o problema para a geração t:

$$\mathcal{L} = u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) + \lambda_t (w_t - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{(1 + r_{t+1} - \delta)})$$

- Implica na equação de Euler padrão:

$$u'(c_t^1) = \beta(1 + r_{t+1} - \delta) u'(c_{t+1}^2), \quad \forall t$$

- Substituindo pelas restrição orçamentárias, temos uma função implícita da poupança (em função do salário e taxa de juros):

$$s_t = s(w_t, r_{t+1}),$$

- onde s é uma função crescente em w_t e pode ser crescente ou decrescente em r_{t+1} (depende da utilidade).

Equilíbrio Competitivo

Definição: O equilíbrio em mercados sequenciais é uma alocação para as famílias $\{c_t^1, c_t^2, s_t\}_{t=1}^{\infty}$, alocação para a firma $\{K_t, L_t\}_{t=1}^{\infty}$ e preços $\{r_t, w_t\}_{t=1}^{\infty}$ em que:

1. Dado os preços e k_1, $\{c_t^1, c_t^2, s_t\}_{t=1}^{\infty}$ é a solução do problema das famílias.
2. Dado os preços, $\{K_t, L_t^d\}_{t=1}^{\infty}$ é a solução do problema das firmas.
3. Os mercados estão em equilíbrio (em todos os $t \geq 1$):

$$
\begin{aligned}
&c_t^1 L_t + c_t^2 L_{t-1} + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = F(K_t, L_t) \\
&K_{t+1} = S_t = s(w_t, r_{t+1}) L_t \\
&L_t^d = L_t
\end{aligned}
$$

Note o timing: a poupança da geração jovem é o capital de amanhã.

Estado Estacionário

- **Estado Estacionário**: variáveis (c^1, c^2, s, k, r, w) são constantes ao longo do tempo.
- Lembre-se que $k_t = K_t/L_t$ pode ser constante ao longo do tempo, variáveis agregadas cresce (via crescimento populacional).
- A economia tem um único estado estacionário?

Caracterizando o Equilibrio

- Utilizando o equilíbrio no mercado de ativos, encontramos a lei de movimento de uma economia OLG:

$$K_{t+1} = s(w_t, r_{t+1})L_t$$
$$k_{t+1} = \frac{s(w_t, r_{t+1})}{(1+n)}$$
$$k_{t+1} = \frac{s(f(k_t) - k_t f'(k_t), f'(k_{t+1}))}{(1+n)}$$

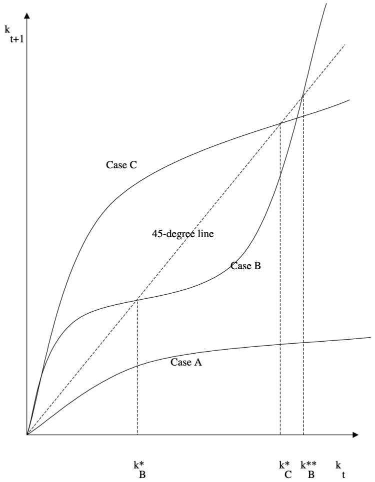
- A princípio é só colocar um k_1 inicial e iterar para encontrar a sequência de $\{k_{t+1}\}_{t=1}^{\infty}$ que converge ao estado estacionário:

$$k_{ss} = \frac{s(f(k_{ss}) - k_{ss} f'(k_{ss}), f'(k_{ss}))}{(1+n)}$$

- **Problema:** Sem especificar claramente a função utilidade podem existir múltiplos estados estacionários.

Caracterizando o Equilibrio

- É possível caracterizar dk_{t+1}/dk_t utilizando o teorema da função implícita.
- Dependendo das formas funcionais podem existir casos como:
  - Não existe Steady State com $k > 0$.
  - Existe um único Steady State.
  - Existem múltiplos Steady States.



Caso CRRA e Cobb-Douglas

- Considere: $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$ e $f(k) = k^{\alpha}$.
- Utilizando a Equação de Euler e substituindo a restrição orçamentária:

$$
\begin{aligned}
c_{t+1}^2 &= c_t^1(\beta(1 + r_{t+1} - \delta))^{1/\sigma} \\
s_t(1 + r_{t+1} - \delta) &= (w_t - s_t)\beta(1 + r_{t+1} - \delta)^{1/\sigma} \\
s_t &= \frac{w_t}{1 + \beta^{-1/\sigma}(1 + r_{t+1} - \delta)^{-(1-\sigma)/\sigma}}
\end{aligned}
$$

  note que o denominador é > 1 (poupança é sempre menor que w_t).
- $\partial s_t / \partial w_t \in (0, 1)$.
- $\partial s_t / \partial r_{t+1} < 0$ se $\sigma > 1$, $\partial s_t / \partial r_{t+1} > 0$ se $\sigma < 1$ e $\partial s_t / \partial r_{t+1} = 0$ se $\sigma = 1$.

Caso CRRA e Cobb-Douglas

- Lei de Movimento do Capital:

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} &= \frac{s_t}{(1+n)} = \frac{w_t}{(1+n)[1+\beta^{-1/\sigma}(1+r_{t+1}-\delta)^{-(1-\sigma)/\sigma}]} \\
k_{t+1} &= \frac{f(k_t)-k_t f'(k_t)}{(1+n)[1+\beta^{-1/\sigma}(1+f'(k_{t+1})-\delta)^{-(1-\sigma)/\sigma}]} \\
k_{t+1} &= \frac{(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(1+n)[1+\beta^{-1/\sigma}(1+\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}-\delta)^{-(1-\sigma)/\sigma}]}
\end{aligned}
$$

- É possível demonsttrar que está economia converge para um único estado estacionário com $k_{ss} > 0$ (ignorando o caso trivial $k_0 = 0$).

Modelo Canônico

- No caso especial que $u(c) = \ln c$ $(\sigma = 1)$, temos que efeito o renda e o substituição de r_{t+1} em s_t são cancelados e:

$$s_t = \frac{\beta}{(1+\beta)} w_t \qquad \text{e} \qquad k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)k_t^{\alpha}}{(1+n)(1+\beta)},$$

  ou seja, a taxa de poupança é uma fração constante da renda (assim como no modelo de Solow!).

- O estado estacionário:

$$k_{ss} = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

Ineficiência Dinâmica

Ineficiência Dinâmica

- No modelo Neoclássico padrão: solução do Planejador $\Leftrightarrow$ Eq. competitivo.
  - No OLG não podemos garantir isso.
- **Intuição**: Mercado inexistente. Não há empréstimo intergeneracional.
- O jovem não pode pegar um empréstimo do velho em t, já que em $t+1$ o velho não vai estar vivo para receber o pagamento.

Planejador

- Seja μ_t o peso de pareto que o planejador dá para cada geração.
- O problema do planejador maximiza a utilidade do consumo (per capita):

$$\max_{\{c_t^1, c_t^2\}_{t=1}^{\infty}} \mu_0 u(c_1^2) + \sum_{t=1}^{\infty} \mu_t [u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)]$$

$$\text{s.t.} \quad c_t^1 + \frac{c_t^2}{(1+n)} + (1+n)k_{t+1} - (1-\delta)k_t = f(k_t) \qquad \forall t.$$

- Para que o problema seja bem definido: $\sum_{t=1}^{\infty} \mu_t < \infty$.

Planejador

- Lagrangeano

$$\mathcal{L} = \mu_0 u(c_1^2) + \sum_{t=1}^{\infty} \mu_t \left(u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) \right) + \dots$$
$$\dots \sum_{t=1}^{\infty} \lambda_t \left(f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t^1 - \frac{c_t^2}{(1+n)} - (1+n)k_{t+1} \right)$$

- C.P.Os p/ todo t:

$$\mu_t u'(c_t^1) = \lambda_t$$
$$\mu_{t-1}\beta u'(c_t^2) = \lambda_t/(1+n)$$
$$\lambda_{t+1}(1-\delta+f'(k_{t+1})) = \lambda_t(1+n)$$

Planejador

- Otimalidade requer a Equação de Euler:

$$\beta(1-\delta+f'(k_{t+1}))u'(c_{t+1}^2)=u'(c_t^1) \qquad \forall t\geq 1$$

- Exatamente igual à solução das famílias. Planejador respeita a otimalidade da família.
- Transferência de recursos entre gerações:

$$\begin{aligned}\mu_{t-1}(1+n)\beta u'(c_t^2)&=\mu_t u'(c_t^1)\\ \mu_{t-1}(1+n)u'(c_{t-1}^1)&=\mu_t u'(c_t^1)(1-\delta+f'(k_t)) \qquad \forall t\geq 1\end{aligned}$$

- Não há condição semelhante no equilíbrio competitivo!

Regra de Ouro

- Suponha $\mu_t = \omega^t$, com $\omega < 1$, e no estado estacionário: $\mu_t / \mu_{t-1} = \omega$. Logo:

$$\omega(1 - \delta + f'(k_{ss})) = (1 + n)$$

- Essa condição é equivalente **Regra de Ouro Modificada** do modelo de crescimento neoclássico (*Modified Golden Rule*).

- Note que se $\omega = \beta$, a condição seria equivalente a Equação de Euler no crescimento neoclássico em tempo discreto (com população).

Regra de Ouro

- Lembre-se que para encontrar a **Regra de Ouro** (capital que maximiza consumo per capita) basta utilizar a restrição de recursos:

$$\underbrace{c_{ss}^1 + c_{ss}^2/(1+n)}_{c_{ss}} = f(k_{ss}) + (1-\delta)k_{ss} - (1+n)k_{ss}$$

$$\partial c_{ss}/\partial k_{ss} = 0 \Rightarrow (1 - \delta + f'(k_{ss}^{GR})) = (1+n)$$

- Como $\omega < 1$, o capital escolhido pelo planejador é **menor** que o da Regra de ouro: $k_{ss} < k_{ss}^{GR}$ (assim como no modelo de crescimento neoclássico!).

- Solução Pareto Ótimo: $f'(k_{ss}) - \delta > n$

Ineficiência Dinâmica

- Quando $f'(k_{ss}) - \delta < n$ estamos no caso de **ineficiência dinâmica**. Isso implica em superacumulação de k.
- Ok, mas esse é o caso do equilíbrio descentralizado?
- Lembre-se que no caso com Cobb-Douglas e utilidade $\log$:

$$k_{ss} = \left(\frac{\beta(1-\alpha)}{(1+n)(1+\beta)} \right)^{1/(1-\alpha)},$$

- ou seja, ineficiência dinâmica ocorre quando:

$$\frac{\alpha(1+n)(1+\beta)}{\beta(1-\alpha)} - \delta < n.$$

- Não é apenas uma curiosidade teórica. Para parâmetros bem razoáveis estamos no caso de **ineficiência dinâmica**.

Ineficiência Dinâmica

- Note que quando estamos **ineficiência dinâmica** podemos encontrar uma alocação factível que melhore a situação de todas as gerações..
- Suponha: $r_{ss} - \delta < n$. Claramente, $k_{ss} > k_{ss}^{GR}$.
- Em t, vamos reduzir k_{t+1} por $-\Delta k^*$ de maneira que em $t+1, t+2...$ estaremos em um novo SS (note que é uma alocação fáctivel).
  - Via restrição de recursos:

$$c_t = f(k_t) + (1-\delta)k_t - (1+n)k_{t+1}$$

  - Em t, o consumo total, c_t, aumenta: $\Delta c_t = (1+n)\Delta k^*$.
  - No novo estado estacionário, $\tau = t+1, t+2...$, o consumo total aumenta:

$$\Delta c_\tau = -[\underbrace{f'(k^* - \Delta k^*) - (n+\delta)}_{<0}]\Delta k^* > 0$$

Previdência Social

Previdência Social

- Uma das primeiras aplicações do modelo OLG é o estudo da Previdência Social.
- Teoricamente, a previdência social pode impedir superacumulação de capital.
- 2 sistemas de Previdência Social:
    1. **Contas Individuais ou Capitalização** (*Fully funded*): o governo abre uma conta no seu nome e faz uma poupança forçada que financiará sua aposentadoria no futuro.
    2. **Repartição** (*Pay-as-you-go*): a geração de jovens paga a aposentadoria dos velhos atuais.

Fully Funded System

- Governo taxa o agente quando jovem com um imposto *lump-sum* τ, e paga ele quando velho uma pensão $b = \tau(1 + r_{t+1} - \delta)$.

- Problema do agente:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t^1 \geq 0,\ c_{t+1}^2 \geq 0,\ s_t} \quad u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2) \\ s.t. \quad & c_t^1 + s_t \leq w_t - \tau, \\ & c_{t+1}^2 \leq (1 + r_{t+1} - \delta)(s_t + \tau) \end{aligned}$$

- Ou seja, a poupança forçada foi alocada em capital produtivo. Eq. no mercado de ativos: $s_t + \tau = (1 + n)k_{t+1}$

Fully Funded System

- Faz alguma diferença? Note que a restrição orçamentária intertemporal continua sendo a mesma:

$$c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{(1 + r_{t+1} - \delta)} = w_t$$

- A **renda permanente** (w_t) do agente não se altera, logo a alocação ótima c^1 e c^2 é a mesma.

- Se o governo forçar uma poupança ao agente, ele simplesmente diminui a poupança privada na mesma proporção: poupança pública *crowds out* a poupança privada.

- Mercado de ativos: $s_t + \tau = k_{t+1}(1 + n)$.

- Como qualquer aumento em τ tem uma diminuição igual em s_t, o equilíbrio continua o mesmo!

Fully Funded System

- Os preços não mudam.
- E as alocações dos agentes não mudam:
  - c.p.o do problema é o mesmo.
  - Renda permanente é a mesma.
- Equilíbrio é o mesmo e a previdência não gera uma melhora de Pareto.
- Suposições cruciais para a irrelevância da previdência para o equlíbrio:
  1. O imposto não distorce nenhuma decisão individual.
  2. Não há restrições na escolha da poupança privada s_t.
  3. Valor presente do imposto é o mesmo (τ é igual em t e $t+1$).

Pay-as-you-go System

- Governo taxa os jovens com um imposto *lump-sum* τ e paga os velhos uma pensão $b = \tau(1+n)$ para os velhos (e assim mantém o orçamento equilibrado).

- Problema do agente:

$$\max_{c_t^1 \geq 0,\ c_{t+1}^2 \geq 0,\ s_t} u(c_t^1) + \beta u(c_{t+1}^2)$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & c_t^1 + s_t \leq w_t - \tau, \\ & c_{t+1}^2 \leq (1 + r_{t+1} - \delta)s_t + \tau(1+n) \end{aligned}$$

- Pela perspectiva do agente o sistema é uma poupança forçada com retorno n.

- A não ser que $r_{t+1} - \delta = n$, a renda permanente é alterada com a previdência.

Pay-as-you-go System

- O equilíbrio normalemente também é alterado.
  - O imposto **NÃO** é alocado em capital produtivo, ele é transferido diretamente para a geração mais velha.
  - Isso significa que a condição de equilíbrio no mercado de ativos: $s_t = (1+n)k_{t+1}$.
- Em condições normais (i.e. sem equilíbrios múltiplos), a introdução da aposentadoria:
  - Reduz a poupança privada, s_t, e o capital k_{t+1}.
  - Aumenta a taxa de juros r_{t+1}.
- Se estamos no caso da **ineficiência dinâmica**, a previdência privada pode ajudar a chegar na alocação pareto ótimo.
  - Por outro lado, se estamos em uma alocação eficiente ($k < k^{GR}$), o desincentivo a poupança pode piorar a situação.

Taking Stock

- Modelo de OLG: estrutura realista que forma a base de modelos mais complexos: capital humano, heterogeneidade na renda/riqueza.

- Dependendo das formas funcionais, pode não existir um estado estacionário, assim como podem existir múltiplos.

- O equilíbrio descentralizado pode não ser eficiente (mesmo com formas funcionais usuais).

- Introduzimos previdência no modelo OLG. O modelo de previdência importa para a acumulação de capital da economia.