

Macroeconomia I

Modelo de Crescimento Neoclássico

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

- **Solow**: Taxa de poupança constante, sY_t , $s \in (0, 1)$.
- **Ramsey-Cass-Koopmans**: Poupança endógena.
- Necessário especificar e resolver o problema do consumidor:
 - ▶ Entender os determinantes de poupança.
 - ▶ Discutir óptimalidade no contexto do modelo.
 - ▶ Algum espaço para política?

Referências

- Acemoglu Cap. 8.
- Notas do Dirk Krueger Cap. 9.
- Parte de política fiscal: capítulos “Ricardian Equivalence” e “Fiscal policies...” do Ljungqvist & Sargent.

Alguns truques importantes

Crescimento em tempo contínuo:

- Taxa de crescimento em um intervalo Δt :

$$\frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{x_t \Delta t} \quad \text{ou em log} \quad \frac{\ln x_{t+\Delta t} - \ln x_t}{\Delta t}$$

tomando o limite:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_{t+\Delta t} - x_t}{x_t \Delta t} = \frac{\dot{x}_t}{x_t} = g$$

- Suponha uma variável $x = X/L$, sendo que X cresce a uma taxa g e L a uma taxa n :

$$\frac{\dot{x}_t}{x_t} = \frac{\dot{X}_t}{X_t} - \frac{\dot{L}_t}{L_t} = g - n.$$

Ramsey-Cass-Koopmans

Environment e Preferências

- Horizonte infinito e tempo contínuo.
- Família representativa com utilidade instantânea $u(c_t)$.
 - ▶ $u(c_t)$ estritamente crescente, côncava, duas vezes diferenciável, satisfaz as condições de Inada.
- **Demografia:** $L_0 = 1$ e crescimento populacional a uma taxa n : $L_t = e^{nt}$.
- Toda a família oferta trabalho inelasticamente (i.e. não há decisão de trabalho-lazer).

- Consumo per capita: $c_t = \frac{C_t}{L_t}$, onde C_t é o consumo agregado.
- Função utilidade:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} L_t u(c_t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt$$

- Suposição para garantir que a integral seja limitada: $\rho > n$.

- Função de produção: $Y_t = F(A_t, K_t, L_t)$.
- Suposições usuais: retornos constante de escala e condições de Inada.
- No momento vamos assumir: $A_0 = 1$ sem avanço tecnológico.
- Defina as variáveis per capita: $y_t = Y_t/L_t$ e $k_t = K_t/L_t$:

$$y_t = \frac{F(K_t, L_t)}{L_t} = F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) \equiv f(k_t)$$

- Mercados de fatores/bem final é competitivo: preço do capital e trabalho igual ao produto marginal:

$$r_t = F_k(K_t, L_t) = f'(k_t)$$
$$w_t = F_w(K_t, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t)$$

Problema da Família

- A restrição orçamentária (agregada) é:

$$\dot{\mathcal{A}}_t = r_t \mathcal{A}_t + w_t L_t - C_t,$$

onde \mathcal{A}_t é quantidade ativos agregada. Defina $a_t = \mathcal{A}_t/L_t$ e temos a restrição orçamentária per capita:

$$\dot{a}_t = (r_t - \delta - n)a_t + w_t - c_t.$$

- Como já vimos, equilíbrio no mercado de título $a_t = k_t$ (mas não necessariamente em modelos com títulos do governo ou outros ativos arriscados).
- E a condição de *no-Ponzi game* em tempo contínuo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a_t \exp\left(-\int_0^t (r_s - \delta - n) ds\right) \geq 0.$$

Problema da Família

- O problema da família:

$$\begin{aligned} & \max_{c_t \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} u(c_t) dt \\ \text{s.t. } & \dot{a}_t = (r_t - \delta - n)a_t + w_t - c_t, \\ & a_0 \text{ dado,} \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} a_t \exp\left(-\int_0^t (r_s - \delta - n) ds\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Equilíbrio

Definição: O equilíbrio competitivo (sequencial) consiste em alocações para as famílias $\{c_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$, alocações para a firma $\{K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$ e preços $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ em que:

1. Dado os preços e $a_0 = K_0/L_0$, as alocações $\{c_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolvem o problema da família.
2. Dado os preços, as alocações $\{K_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolvem o problema da firma:

$$\max_{K_t, L_t} F(K_t, L_t) - r_t K_t - w_t L_t$$

3. Market clearing para o mercado de trabalho, de capital e de bens.

$$e^{nt} L_0 = L_t$$

$$a_t L_t = K_t$$

$$F(K_t, L_t) = \dot{K}_t + \delta K_t + L_t c_t$$

Caracterizando o Equilíbrio

- Problema da família. Hamiltoniano:

$$\hat{H}(a_t, c_t, \mu_t) = u(c_t) + \mu_t(a_t(r_t - \delta - n) + w_t - c_t)$$

- Condições necessárias (junto com a no-Ponzi e LOM do estado):

$$\begin{aligned}u'(c_t) &= \mu_t \\ \mu_t(r_t - \delta - n) &= -\dot{\mu}_t + (\rho - n)\mu_t\end{aligned}$$

- Implica na equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r_t - \delta - \rho).$$

ou utilizando a elasticidade de substituição intertemporal: $1/\sigma(c_t) = -u'(c_t)/(u''(c_t)c_t)$:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(r_t - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)}.$$

Caracterizando o Equilíbrio

- Substituindo r_t :

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(f'(k_t) - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)}.$$

- E a *market clearing* (derive a partir da restrição orçamentária):

$$\dot{k}_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t$$

- A solução $\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ é caracterizada pelo sistema de equações diferenciais, juntamente com as condições iniciais/terminais k_0 e TVC ($\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T} \mu_T k_T = 0$).
- Note que os teoremas do Bem-Estar são satisfeitos e a solução do Planejador é igual a do equilíbrio descentralizado.

Estado Estacionário e Dinâmica de Transição

Estado Estacionário

- Estado estacionário: variáveis são constantes ao longo do tempo, $\dot{k}_t = 0$ e $\dot{c}_t = 0$. Defina as variáveis no estado estacionário k^* e c^* .
- Via EE temos podemos encontrar k^* em função de f , ρ e δ (não depende da forma da função utilidade!):

$$\underbrace{f'(k^*)}_{r^*} - \delta = \rho > n$$

- Note que a *Golden Rule* (capital que maximiza o consumo) é:

$$\frac{dc}{dk} = f'(k^*) - (\delta + n) = 0$$

- Ou seja, o capital escolhido pelo Planejador **é menor** ao da *Golden Rule*. Isto se dá por que o Planejador considera que as famílias descontam consumo futuro.

Estado Estacionário

- Ao contrário do modelo de Solow, em RCK k^* não depende do crescimento populacional!
 - ▶ Ramsey: $f'(k^*) = \delta + \rho$,
 - ▶ Solow: $\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta + n}{s}$,

Note a conexão entre a taxa de poupança s em Solow e o desconto em RCK $\Rightarrow \uparrow \rho$ mais impaciente e menor a acumulação de capital.

- Uma vez que temos k^* computar o resto é fácil:
- Restrição de recursos agregada: $c^* = f(k^*) - (\delta + n)k^*$.
- Taxa de poupança:

$$c^* = (1 - s^*)f(k^*) \Leftrightarrow s^* = \frac{(\delta + n)k^*}{f(k^*)}$$

- **Exemplo:** Utilize $f(k_t) = Ak_t^\alpha$ e faça estática comparativa dos efeitos de A , δ , n , e ρ em c^* e k^*

Estado Estacionário

- **Exemplo:** Utilize $f(k_t) = Ak_t^\alpha$ e faça estática comparativa dos efeitos de A , δ , n , e ρ em c^* e k^* .

$$k^* = \left(\frac{\alpha A}{\delta + \rho} \right)^{1/(1-\alpha)}$$

$$c^* = k^*(Ak^{*\alpha-1} - (\delta + n)) = k^* \left(\frac{(\delta + \rho) - \alpha(\delta + n)}{\alpha} \right)$$

- Já que $\rho > n$ e $\alpha < 1$, consumo no SS é uma fração do capital no SS.
 - ▶ $\partial k^*/\partial A > 0$ e $\partial c^*/\partial A > 0$
 - ▶ $\partial k^*/\partial \rho < 0$ e $\partial c^*/\partial \rho < 0$
 - ▶ $\partial k^*/\partial \delta < 0$ e $\partial c^*/\partial \delta < 0$
 - ▶ $\partial k^*/\partial n = 0$ e $\partial c^*/\partial n < 0$

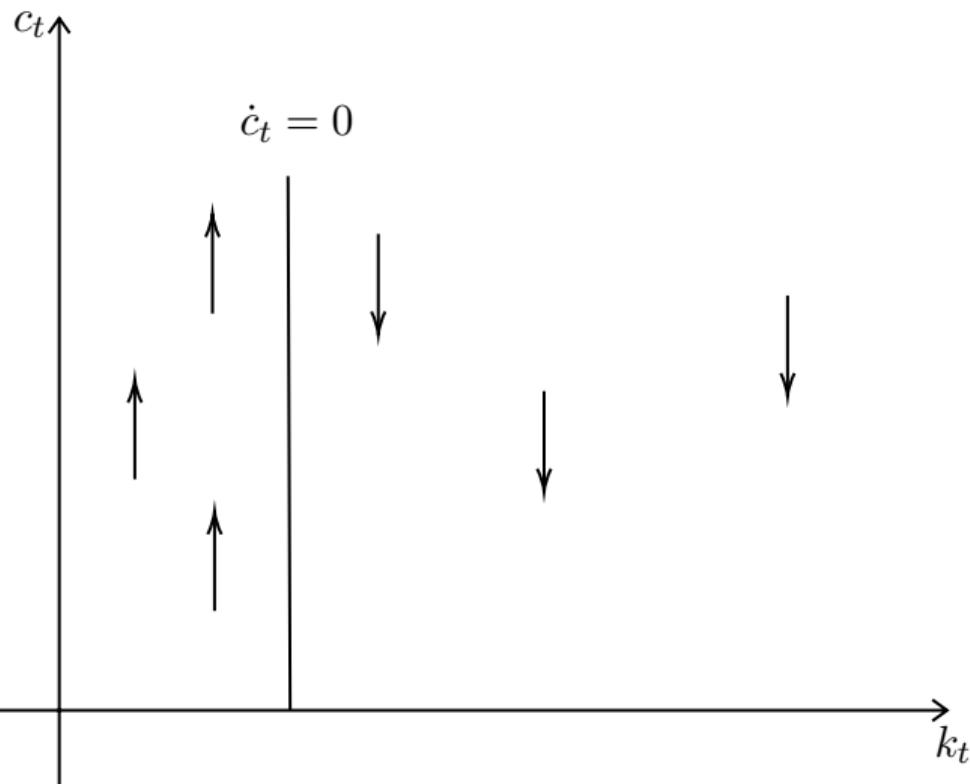
Transition Dynamics

- Lembre-se que o equilíbrio é caracterizado pelas equações (+ TVC e k_0):

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(f'(k_t) - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)},$$
$$\dot{k}_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t.$$

- Como podemos analisar a dinâmica do sistema fora do estado estacionário? \Rightarrow Diagrama de fases.
- Também vamos mostrar que o sistema é *saddle-path stable*: existe uma única trajetória $\{k_t, c_t\}$ que converge para o estado estacionário.
 - ▶ Dado o estado k_0 , o controle c_0 (ou alternativamente μ_0) se ajusta instantaneamente para a trajetória única. Por isso a variável controle é conhecida como **jump variable**.
 - ▶ Por exemplo, se ocorrer uma mudança de política inesperada o consumidor ajusta c_t para a trajetória ótima (enquanto o estado k obrigatoriamente segue a LOM).

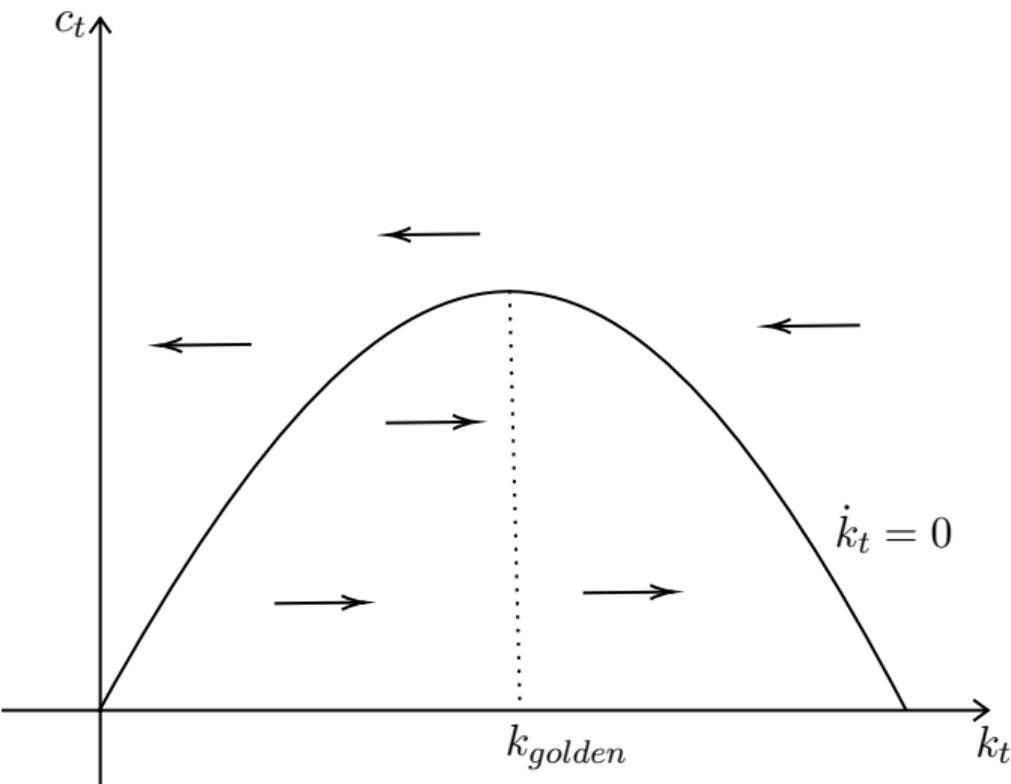
Diagrama de Fases



$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(f'(k_t) - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)}$$

- Se $\uparrow k_t \Rightarrow \downarrow f'(k_t) \Rightarrow \downarrow \dot{c}$.
- Quando $f'(k_t) = \delta + \rho$ consumo é constante.
- A reta é vertical: não depende de c_t .

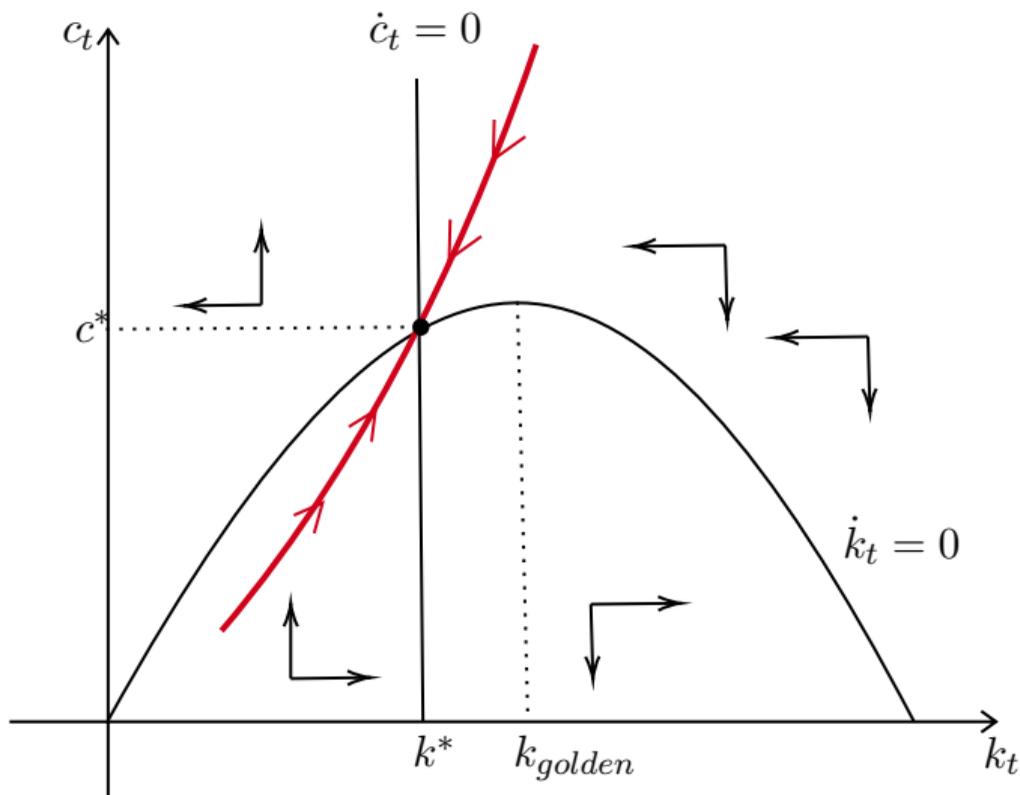
Diagrama de Fases



$$\dot{k}_t = f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t$$

- Se $\uparrow c_t \Rightarrow \downarrow \dot{k}$.
- Forma de U invertida dado por $f(k_t) - (\delta + n)k_t$.
- k_{golden} ponto que maximiza o consumo.

Diagrama de Fases



- Dado k_0 , c_0 salta para o *stable-path*.
- Se $c'_0 > c_0$ a trajetória converge para $k = 0$ e $c > 0$: viola a condição de *feasibility*.
- Se $c''_0 < c_0$ a trajetória converge para $c = 0$ e $k > 0$: viola a TVC.
- Trajetória única que converge para o *Steady State*.

Estabilidade Local

- Uma outra forma de checar a *Saddle-path Stability* do sistema \Rightarrow Estabilidade local.
- Linearize as equações do sistema com expansão de Taylor na vizinhança do Estado estacionário:

$$\begin{aligned}\dot{k}_t &= f(k_t) - (\delta + n)k_t - c_t \Rightarrow \dot{k} = (f'(k^*) - (\delta + n))(k - k^*) - (c - c^*) \\ \dot{c}_t &= c_t \frac{(f'(k_t) - \delta - \rho)}{\sigma} \Rightarrow \dot{c} = c^* \frac{f''(k^*)}{\sigma} (k - k^*) + \underbrace{\frac{(f'(k^*) - \delta - \rho)}{\sigma}}_{=0} (c - c^*)\end{aligned}$$

- Escreva o sistema na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{k} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(k^*) - \delta - n & -1 \\ c^* f''(k^*)/\sigma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - k^* \\ c - c^* \end{bmatrix}$$

Estabilidade Local

Theorem (Acemoglu 7.19)

Considere o sistema $\dot{x}_t = G(x_t)$ onde G é continuamente diferenciável e x_0 dado. O estado estacionário é $G(x^*) = 0$ e defina $A = DG(x^*)$, D é a jacobiana de G .

Suponha que m autovalores de A tenham partes reais negativas enquanto $n - m$ têm partes reais positivas. Então existe uma variedade (i.e., um espaço topológico) m -dimensional na vizinhança do estado estacionário, de modo que a partir de qualquer x_0 nessa variedade, existe um único $x_t \rightarrow x^*$.

- No nosso caso se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} f'(k_t) - \delta - n & -1 \\ c^* f''(k^*)/\sigma & 0 \end{bmatrix}$$

tem $m = 1$ autovalores negativos, então em torno do estado estacionário existe uma linha (dimensão $m = 1$) de pontos (c, k) que convergem para o estado estacionário.

Estabilidade Local

- Queremos encontrar os autovalores λ que $Ax = \lambda x$. Neste caso temos $\det(A - \lambda I)x = 0$

$$\det \begin{bmatrix} f'(k_t) - \delta - n - \lambda & -1 \\ c^* f''(k^*)/\sigma & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda[f'(k_t) - \delta - n - \lambda] + c^* f''(k^*)/\sigma = 0$$

logo

$$\lambda = [f'(k_t) - \delta - n \pm \sqrt{(f'(k_t) - \delta - n)^2 - 4c^* \underbrace{f''(k^*)/\sigma}_{<0}}]/2$$

- Como $\sqrt{(f'(k_t) - \delta - n)^2 - 4c^* f''(k^*)/\sigma} > f'(k_t) - \delta - n$, logo existe exatamente um autovalor negativo.

Balanced Growth Path

Balanced Growth Path

- Para o modelo ser consistente com os Fatos de Kaldor ele tem que ter crescimento de longo prazo.
- **Balanced Growth Path:** Todas as variáveis crescem a uma taxa constante.
- Suponha uma tecnologia com *Labor-augmenting Technological Change*:

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t), \quad \text{onde } A_t = A_0 e^{gt}$$

e g a taxa de crescimento.

- Obviamente não existe mais estado estacionário, precisamos re-definir as variáveis para que elas continuem estacionárias: $\tilde{y}_t = y_t/A_t$, $\tilde{k}_t = k_t/A_t$, $\tilde{c}_t = c_t/A_t$.

Balanced Growth Path

- Note que o crescimento das novas variáveis é o crescimento per capita menos o avanço tecnológico:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{\dot{c}}{c} - \frac{\dot{A}_t}{A_t} = \frac{\dot{c}}{c} - g \quad \text{e} \quad \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \frac{\dot{k}}{k} - g$$

- Utilizando este argumento, o fator que F é CRS ($F(k, A) = AF(\tilde{k}, 1)$), e a definição de $\dot{\tilde{k}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} &= \frac{F(\tilde{k}_t, 1)A_t - (\delta + n)\tilde{k}_tA_t - \tilde{c}_tA_t}{k_t} - g \\ \dot{\tilde{k}} &= f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t \end{aligned}$$

Balanced Growth Path

- E a Equação de Euler estacionária:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} &= \frac{(F_k(k_t, A_t) - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)} - g \\ &= \frac{(f'(\tilde{k}_t) - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)} - g,\end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\frac{\partial F(k, A)}{\partial k} = \frac{\partial F(A\tilde{k}, A)}{\partial \tilde{k}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial k} = Af'(\tilde{k}) \frac{1}{A} = f'(\tilde{k}).$$

- Por um argumento parecido temos que $r^* = f'(\tilde{k})$ é constante no longo prazo (Fato de Kaldor), ou seja, $r_t \rightarrow r^*$.

Balanced Growth Path

- A única maneira que $\dot{\tilde{c}} = 0$, é se o consumo per capita cresce a uma taxa constante no longo prazo: $\dot{c}_t/c_t \rightarrow g$.
- Pela EE, isso implica que $\sigma(c_t) \rightarrow \sigma$.
- **Condição para BGP** é que a elasticidade da utilidade marginal de consumo seja assintoticamente constante. Ou alternativamente, que a elasticidade de substituição intertemporal seja assintoticamente constante.
- Por isso a utilidade CRRA é tão utilizada:

$$u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

Balanced Growth Path

- Dado que $\sigma(c_t) \rightarrow \sigma$ é constante no longo prazo. A condição para que a utilidade seja limitada agora é: $\rho - n > g(1 - \sigma)$. Intuição:

$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$
$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n)t} \frac{(\tilde{c}_t A_0 e^{gt})^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$
$$\int_0^{\infty} e^{-(\rho-n-g(1-\sigma))t} \frac{(\tilde{c}_t A_0)^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt$$

Balanced Growth Path

- A solução agora é o sistema de equações:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{(f'(\tilde{k}_t) - \delta - \rho - g\sigma)}{\sigma}$$
$$\dot{\tilde{k}}_t = f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t$$

- Juntamente com a condição inicial \tilde{k}_0 e a TVC:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(\rho - n - g(1 - \sigma))t} u'(\tilde{c}_t) \tilde{k}_t = 0$$

Steady State

- Note que agora o capital do estado estacionário agora depende da forma da utilidade (σ):

$$f'(\tilde{k}^*) = \delta + \rho + g\sigma,$$

isto implica que: $r^* = \delta + \rho + g\sigma$!

- $\uparrow \sigma \rightarrow$ menor elasticidade de substituição intertemporal $\rightarrow \downarrow \tilde{k}^*$.
- De certa forma, muito parecido com Solow:
 - ▶ \tilde{k} é endógeno e depende de δ , g , e do desconto/IES que determinam a poupança (Solow: taxa de poupança exógena, mas depende de n).
 - ▶ Crescimento de longo prazo per capita é exógeno e é dado por g (igual a Solow).

Exemplo

- Considere utilidade CRRA e função de produção Cobb-Douglas,
 $Y_t = F(K_t, A_t, L_t) = K_t^\alpha (A_t L_t)^{1-\alpha}$:
 - ▶ $\tilde{y}_t = \tilde{k}^\alpha$, onde para uma variável arbitrária agregada X , $\tilde{x} = X/(AL)$.
 - ▶ $r = f'(\tilde{k}) = \alpha \tilde{k}^{\alpha-1}$.
- A Equação de Euler e a restrição de recursos:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{(r_t - \delta - \rho)}{\sigma(c_t)} - g = \frac{1}{\sigma}(\alpha \tilde{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho - \sigma g)$$

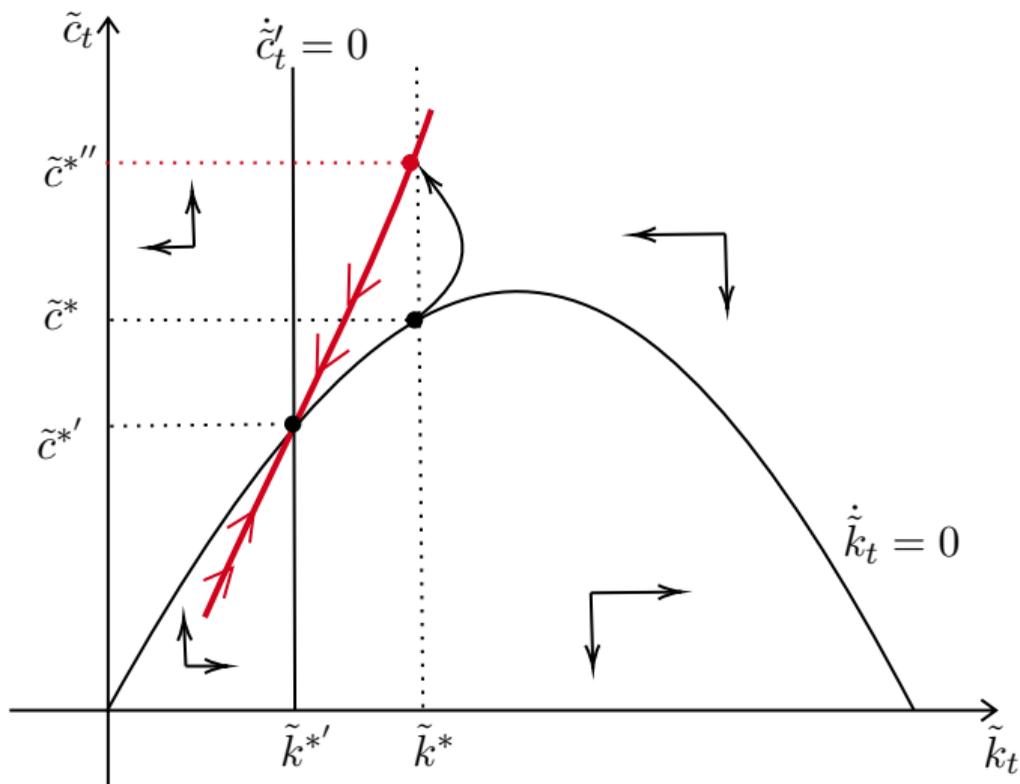
$$\dot{\tilde{k}} = f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t = \tilde{k}^\alpha - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t$$

- Estado estacionário:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{\alpha}{\delta + \rho + \sigma g} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad \text{e} \quad \tilde{c}^* = \left(\frac{\alpha}{\delta + \rho + \sigma g} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{(\delta + \rho + \sigma g) - \alpha(\delta + n + g)}{\alpha} \right)$$

Policy and Comparative Dynamics

Aumento de ρ

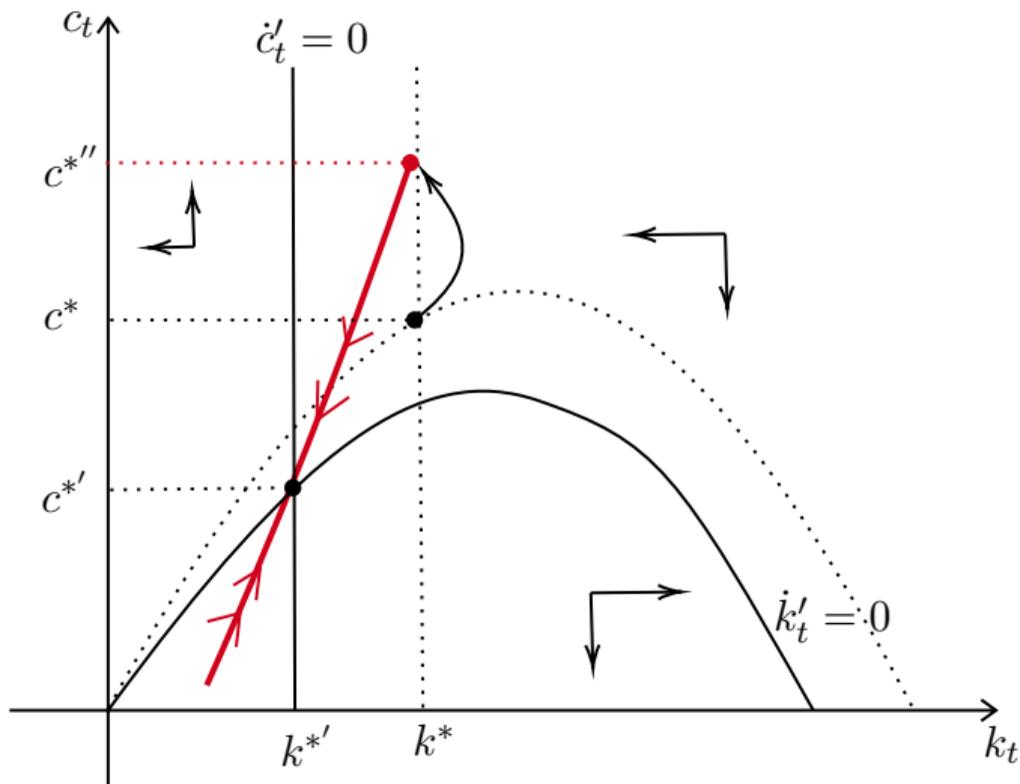


- Suponha que a economia esteja no SS e ocorre um aumento de ρ .

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{(f'(\tilde{k}_t) - \delta - \rho - g\sigma)}{\sigma}$$

- A linha $\dot{\tilde{c}}$ se desloca para a esquerda, e \tilde{c} salta para o novo *stable-path*.
- Eventualmente o sistema converge para o novo SS.

Aumento de δ



- Suponha que a economia esteja no SS e ocorra um aumento de δ .

$$\frac{\dot{c}}{\tilde{c}} = \frac{(f'(\tilde{k}_t) - \delta - \rho - g\sigma)}{\sigma}$$

$$\dot{\tilde{k}} = f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t$$

- A linha \dot{c} se desloca para a esquerda, e a linha \dot{k} para baixo.
- \tilde{c} salta e eventualmente o sistema converge para o novo SS.

- Considere agora uma pequena extensão, o retorno líquido do capital é taxado a τ :

$$\hat{r}_t = (1 - \tau)(r_t - \delta) = (1 - \tau)(f'(\tilde{k}_t) - \delta)$$

- O imposto agregado arrecadado é distribuído via uma transferência *lump-sum* \tilde{t} , logo a restrição orçamentária:

$$\dot{\tilde{a}}_t = \tilde{a}_t(\hat{r}_t - n - g) - \tilde{c}_t + w_t + \tilde{t}_t,$$

onde a transferência ajustada é igual a arrecadação: $\tilde{t} = \tau(r_t - \delta)\tilde{a}_t$.

- O imposto distorce a acumulação de capital, e portanto a EE:

$$\frac{\dot{\tilde{c}}}{\tilde{c}} = \frac{((1 - \tau)(f'(\tilde{k}_t) - \delta) - \rho - g\sigma)}{\sigma}$$

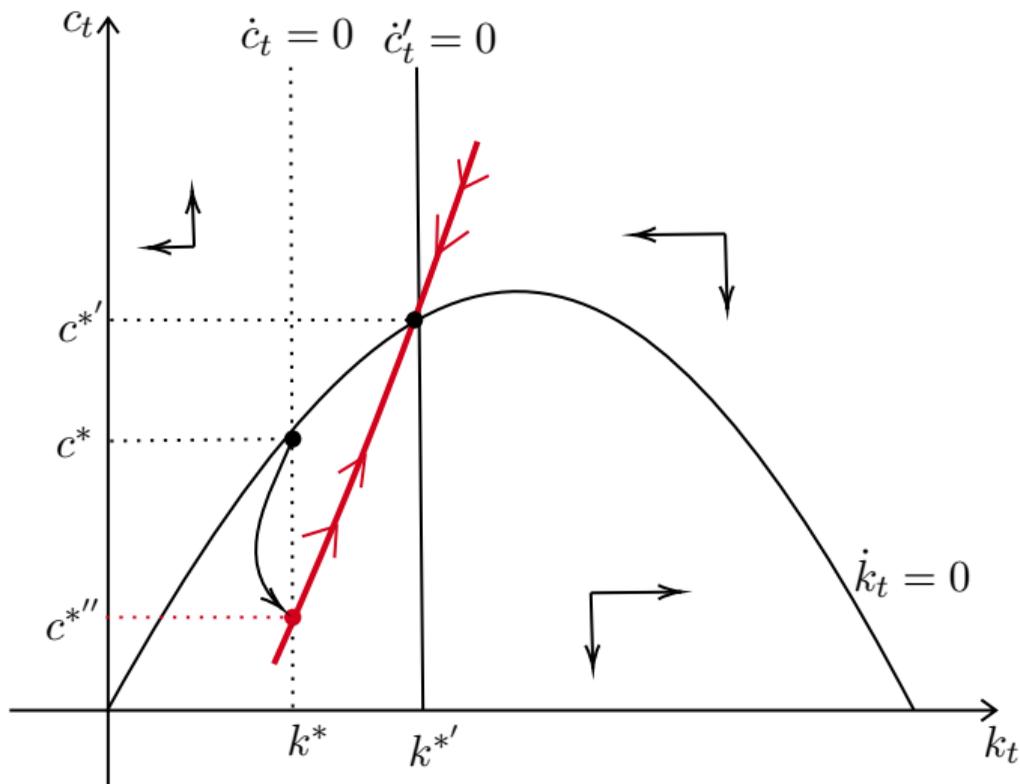
- Mas como o imposto é rebatido de volta ao consumidor (não há governo!), a restrição de recursos da economia não se altera (verifique isso!):

$$\dot{\tilde{k}} = f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t$$

- Dado o desincentivo a acumulação de capital, o capital no *steady state* será menor:

$$f'(\tilde{k}^*) = \delta + \frac{\rho + \sigma g}{1 - \tau}$$

Diminuição de τ



- Diminuição em τ : aumenta o incentivo para acumular capital.
- Aumento da taxa de poupança reduz o consumo inicialmente.
- Logo a acumulação, aumenta o capital/produção/consumo.

Taking Stock

- Modelo de crescimento neoclássico: explica o processo de convergência entre diferentes países.
 - ▶ Muito das conclusões são parecidas com o modelo de Solow.
- Poupança endógena traz novos insights em relação ao impacto das preferências, taxação, e etc no crescimento de longo prazo.
- Para Balanced-Growth Path necessitamos preferências com elasticidade de substituição constante.
- Não explica crescimento de longuíssimo prazo \Rightarrow cresce a taxa exógena g .
 - ▶ Motivação para desenvolver modelos de crescimento endógeno.

Política Fiscal no Modelo de Crescimento Neoclássico

- O governo é parte relevante do PIB:
 - ▶ ea maioria dos países, os gastos do governo são cerca de 20% do PIB.

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

- Esses gastos são financiados via os mais variados tributos.
- O governo também pode acumular dívida, absorvendo a poupança das famílias.
- Vamos pensar como a política fiscal afeta os agentes (famílias e firmas) e variadas agregadas no contexto de um modelo de crescimento neoclássico em tempo discreto.

Restrição Orçamentária do Governo

- Suponha a **restrição orçamentária do governo** para todos os períodos t (b_0 dado):

$$b_{t+1} = (1 + r_t)b_t + G_t - T_t$$

- ▶ G_t é o gasto do governo em bens finais.
 - ▶ T_t é a arrecadação tributária total.
 - ▶ b_t o estoque de dívida pública em t .
- Suponha uma condição *no-Ponzi* para o governo: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{b_{T+1}}{\prod_{s=0}^T (1+r_s)} = 0$
 - Iterando a restrição orçamentária e usando a NPG do governo, encontramos a **restrição orçamentária intertemporal do governo**:

$$b_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{T_t - G_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right)$$

Restrição Orçamentária do Governo

- Iremos supor que a sequência de gastos de governo $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ e o estoque de dívida $\{b_t\}_{t=0}^{\infty}$ são objetos de decisão política e, portanto, exógenos pela perspectiva das famílias e firmas.
- A arrecadação tributária depende de objetos exógenos e endógenos:

$$T_t = \tau_t^c c_t + \tau_t^k r_t a_t + \tau_t^n w_t n_t + \tau_t$$

- ▶ τ_t^c é a alíquota tributária sobre consumo.
 - ▶ τ_t^k e τ_t^n são alíquotas sobre a renda do capital e do trabalho.
 - ▶ τ_t é o imposto *lump-sum*.
- Dado que $\{G_t\}_{t=0}^{\infty}$ é exógeno, a sequência $\{T_t\}_{t=0}^{\infty}$ tem que satisfazer restrição intertemporal do governo. Existem diferentes sequências $\{\tau_t^c, \tau_t^k, \tau_t^n, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ possíveis.
 - ▶ Iremos assumir que $\{\tau_t^c, \tau_t^k, \tau_t^n\}_{t=0}^{\infty}$ são exógenos, e $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ se ajusta para satisfazer a restrição orçamentária.

Famílias e Firmas

- A família representativa com massa unitária valoriza a utilidade do consumo descontado: $U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$, onde u segue as suposições usuais e $\beta \in (0, 1)$.

- A restrição orçamentária é dado, para todo t ,

$$(1 + \tau_t^c)c_t + a_{t+1} = a_t(1 + r_t(1 - \tau_t^k)) + w_t n_t(1 - \tau_t^n) - \tau_t \quad \forall t \quad \text{e } a_0 \text{ dado.}$$

- A família maximiza sua utilidade, tomando os impostos $\{\tau_t^c, \tau_t^k, \tau_t^n, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ e os preços $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$ como dados.
- A firma representativa contrata capital e trabalho para maximizar o seu lucro sujeito à uma função de produção $F(k_t, n_t)$ com CRS.
 - ▶ P.S. suponha que a firma contrata capital pelo retorno bruto (sem depreciação) $\hat{r}_t = r_t + \delta$.

Equilíbrio Competitivo

Definição: O equilíbrio competitivo (sequencial) com governo consiste em preços $\{r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$, uma sequência de política fiscal $\{G_t, b_t, \tau_t^c, \tau_t^k, \tau_t^n, \tau_t\}_{t=0}^{\infty}$, alocações para famílias $\{c_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$, e firmas $\{k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$ em que:

1. Dado os preços e os impostos, as alocações $\{c_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolvem o problema da família.
2. Dado os preços, as alocações $\{k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$ resolvem o problema da firma.
3. A política fiscal satisfaz a restrição orçamentária intertemporal do governo.
4. Market clearing para o mercado de trabalho, de capital e de bens em todo t .

$$n_t = 1$$

$$a_t = k_t + b_t$$

$$F(k_t, n_t) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + G_t$$

Solução da Família

- Lagrange da família:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \{ \beta^t u(c_t) + \lambda_t [a_t(1 + r_t(1 - \tau_t^k)) + w_t n_t(1 - \tau_t^n) - \tau_t - (1 + \tau_t^c)c_t - a_{t+1}] \}.$$

- Tomando as cpo's com respeito ao consumo e a poupança:

$$\beta^t u'(c_t) = \lambda_t (1 + \tau_t^c) \quad \text{e} \quad \lambda_t = (1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k)) \lambda_{t+1},$$

- encontrando a equação de Euler:

$$u'(c_t) = \frac{(1 + \tau_t^c)}{(1 + \tau_{t+1}^c)} \beta (1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k)) u'(c_{t+1}) \quad \forall t$$

- Solução firma é o usual:

$$\hat{r}_t = r_t + \delta = F_k(k_t, n_t) \quad \text{e} \quad w_t = F_n(k_t, n_t) \quad \forall t$$

Efeito dos Impostos no Equilíbrio

- O imposto é distorcivo se ele altera a decisão dos agentes.
 1. O imposto sobre o capital é distorcivo.
 2. Quando não há decisão de trabalho (oferta de trabalho inelástica), impostos constantes sobre o consumo e sobre o trabalho **não** são distorcivos.
 3. Variações no imposto de consumo (i.e., $\tau_t^c \neq \tau_{t+1}^c$) são distorcivas.
 4. O imposto lump-sum **não** é distorcivo.

Equivalência Ricardiana

- Note que o gasto do governo G age como um efeito renda negativo para a família (mais recurso p/ o governo, menos para as famílias).
- Substituindo a restrição do governo na família, vemos que o imposto lump-sum desaparece das condições de equilíbrio.
 - ▶ Isso implica que qualquer sequência lump-sum que satisfaz a restrição do governo é consistente com o equilíbrio.
- Esse resultado é conhecido como **Equivalência Ricardiana**.
 - ▶ O timing do imposto *lump-sum* não tem efeito na dinâmica do modelo \Rightarrow não importa se o governo se financia com *lump-sum* ou faz dívida.

Equivalência Ricardiana

- Suponha $\tau_t^k = \tau_t^c = \tau_t^n = 0$, ou seja o gov. se financia **exclusivamente** via taxaço lump-sum $T_t = \tau_t$.
 - ▶ Verifique as c.p.o's são exatamente iguais a do problema de planejador!
- Iterando a restrição orçamentária da família ao infinito e impondo uma *no-Ponzi*:

$$a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{w_t n_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{c_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right) + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right)$$

- Observe que qualquer sequência de imposto $\{\tau_t\}_{t=0}^{\infty}$ que respeita a restrição orçamentária do governo não altera a restrição orçamentária (intertemporal) da família.

$$b_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{G_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right) = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\tau_t}{\prod_{s=0}^t (1 + r_s)} \right)$$

Equivalência Ricardiana

- **Intuição:** Suponha um governo que escolhe se financiar por 100 anos apenas se endividando e no ano 101 paga toda a sua dívida com um grande imposto lump-sum.
- O agente representativo se importa apenas com sua **renda permanente**, e, sendo racional, observa o governo se endividando e internaliza que daqui a 100 anos terá que pagar um grande lump-sum.
- Ele se prepara para o evento: mantém **a mesma** alocação de consumo (que é dado pela EE) e poupa toda a renda que sobra para pagar o lump-sum no futuro.
- O aumento da dívida governamental é compensado pelo aumento da poupança das famílias \Rightarrow A poupança (famílias + governo) é exatamente a mesma independente do plano do governo.

Equivalência Ricardiana

- A **Equivalência Ricardiana** é um resultado teórico que é sustentado em suposições frágeis:
 - (i) Agentes racionais e de vida infinita (ou altruístas de vida finita).
 - (ii) Mercados completos (agentes podem se endividar sem problemas).
 - (iii) Taxação *lump-sum*.
- Se alguma dessas hipóteses não for satisfeita, a **Equivalência Ricardiana** não se sustenta.

Computando o Equilíbrio

- Dado condições inicial e final (k_0 e a TVC), solução do equilíbrio competitivo são sequências $\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}$ que resolvem o sistema para todo o t :

$$u'(c_t) = \frac{(1 + \tau_t^c)}{(1 + \tau_{t+1}^c)} \beta (1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k)) u'(c_{t+1})$$

$$F(k_t, n_t) = c_t + k_{t+1} - (1 - \delta)k_t + G_t$$

$$\hat{r}_t = r_t + \delta = F_k(k_t, n_t)$$

onde $\{G_t, \tau_t^c, \tau_t^k\}_{t=0}^{\infty}$ são sequências exógenas (juntamente com o *lump-sum*).

- Suponha que eventualmente a política fiscal se torne constante:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G_t = G_{ss} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t^k = \tau_{ss}^k \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_t^c = \tau_{ss}^c$$

- Dado as hipóteses usuais na função de produção e utilidade, a economia converge para um estado estacionário.
- Note que apenas o τ_k distorce o capital e a economia no estado estacionário:

$$1 = \beta[1 + (F_k(k_{ss}, 1) - \delta)(1 - \tau_{ss}^k)]$$
$$F(k_{ss}, 1) = c_{ss} + \delta k_{ss} + G_{ss}$$

Equilibrium Path

- Temos a condição inicial k_0 (ou o estado estacionário inicial) e o estado estacionário final k_{ss} e c_{ss} .
- Sabemos a sequência exógena de política fiscal $\{G_t, \tau_t^c, \tau_t^k\}_{t=0}^\infty$.
- Podemos calcular a sequência de equilíbrio $\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^\infty$ utilizando o **shooting algorithm**.
- **Shooting algorithm:** “chutamos” um valor inicial de c_0 e utilizamos o sistema de equações para simular a sequência $\{k_{t+1}, c_t\}_{t=0}^S$ até um período S .
 - ▶ Se pararmos no estado estacionário final, o c_0 é a solução;
 - ▶ caso contrário, tentamos outro c_0 .
- É um algoritmo intuitivo que funciona para resolver sistemas de equações de diferenças (ou diferenciais) com duas condições. Lembre-se do caminho de sela do diagrama de fases.

Shooting Algorithm

- (i) Resolva para o estado estacionário final: k_{ss} e c_{ss} .
- (ii) Selecione um período de tempo S suficientemente longo (de forma que a economia atinja o SS), e chute um candidato à solução de consumo inicial c_0 .
- (iii) Utilize a *Resource Constraint* e k_0 para computar k_1 . Utilize c_0 e k_1 na EE para computar c_1 . Continue utilizando c_t e k_t para encontrar c_{t+1} e k_{t+1} .
- (iv) Prossiga até o período S para encontrar a sequência candidata à solução: $\{\hat{k}_{t+1}, \hat{c}_t\}_{t=0}^S$.
- (v) Compute $\hat{k}_S - k_{ss}$. Se $\hat{k}_S > k_{ss}$, aumente o chute c_0 e tente novamente; Se $\hat{k}_S < k_{ss}$, diminua o chute c_0 e tente novamente.
- (vi) Prossiga até encontrar um c_0 que faça $\hat{k}_S \approx k_{ss}$.

Shooting Algorithm

- Em nenhum momento utilizamos a restrição intertemporal do governo. Duas opções:
 1. Supor que o governo pode impor taxaçaõ *lump-sum*.
 2. Supor que o governo **NÃO** pode impor taxaçaõ *lump-sum*.
- No primeiro o imposto lump-sum serve como um resíduo que se ajusta para manter o orçamento do gov. balanceado.
- O segundo caso é mais complicado:
 - ▶ É necessário computar uma sequência de equilíbrio (dado uma sequência de política fiscal) e checar se a restrição orçamentária do governo foi satisfeita.
 - ▶ Caso não tenha sido, altere a sequência de imposto escolhida (ou os gastos do governo) e tente novamente até encontrar uma sequência que balanceie o orçamento do governo.
 - ▶ Será necessário um *loop* adicional, e existe um grande número de possibilidades para ajustar o orçamento do governo.

- Iremos estudar choques na política fiscal, transitórios ou permanentes.
- Em $t = 0$, A economia está no estado estacionário em $t = 0$, quando em $t = 1$ é anunciado uma nova política fiscal que será implementada em $t = 10$.
 - ▶ O governo tem acesso a taxaçaõ *lump-sum* para balancear o seu orçamento.
- Iremos computar a transição até o estado estacionário final.
- Note que os agentes são racionais e reagem no momento do anúncio.

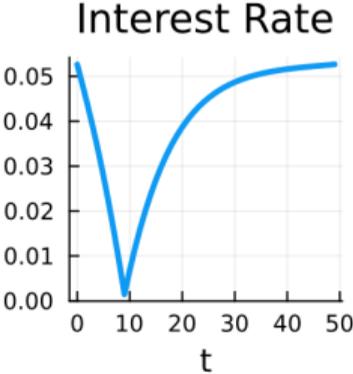
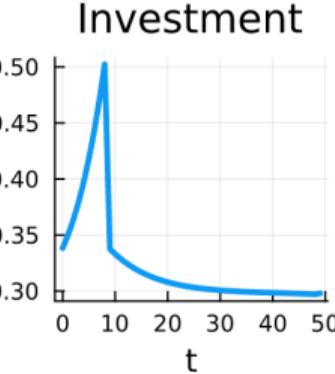
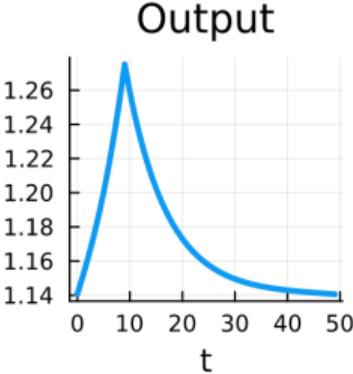
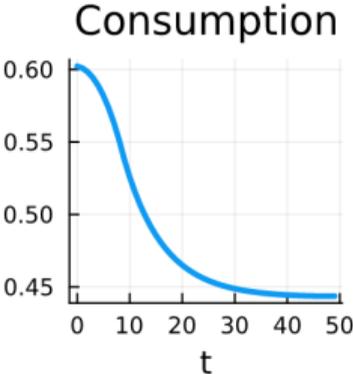
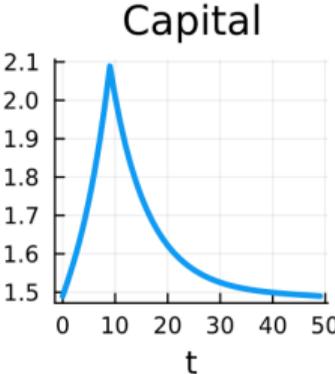
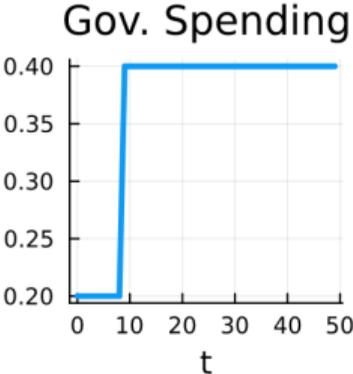
Formas Funcionais e Parâmetros

- Formas funcionais:

$$F(k_t, n_t) = k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \quad \text{e} \quad u(c_t) = \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

- Parâmetros: $\alpha = 0.33$, $\beta = 0.95$, $\delta = 0.2$ e $\gamma = 2$.
- Política fiscal no estado estacionário inicial: $G_{ss} = 0.2$, $\tau_{ss}^c = 0.0$, $\tau_{ss}^k = 0.0$.
- Iremos simular o modelo por 50 períodos.

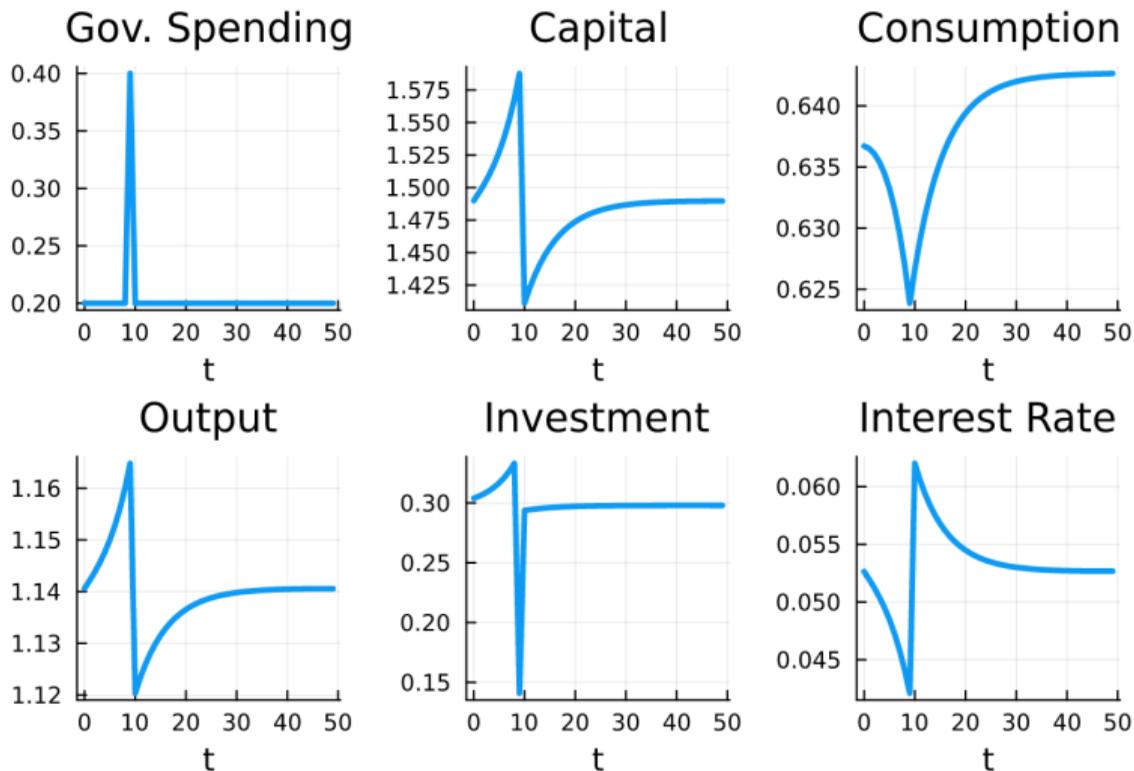
Aumento Permanente do Gasto



Aumento Permanente do Gasto

- O governo anuncia que os gastos irão dobrar em $t = 10$ e se manter assim para sempre.
- O aumento nos gastos governamentais é um **efeito renda negativo permanente** na renda da família.
- As famílias consomem menos inicialmente e poupam mais para suavizar esse efeito renda negativo vindo do futuro. Após o aumento dos gastos, a economia começa a desacumular capital.
- O capital (e a produção) do estado estacionário final é o mesmo do inicial, mas o consumo é menor: **se o governo consome mais, as famílias consomem menos.**

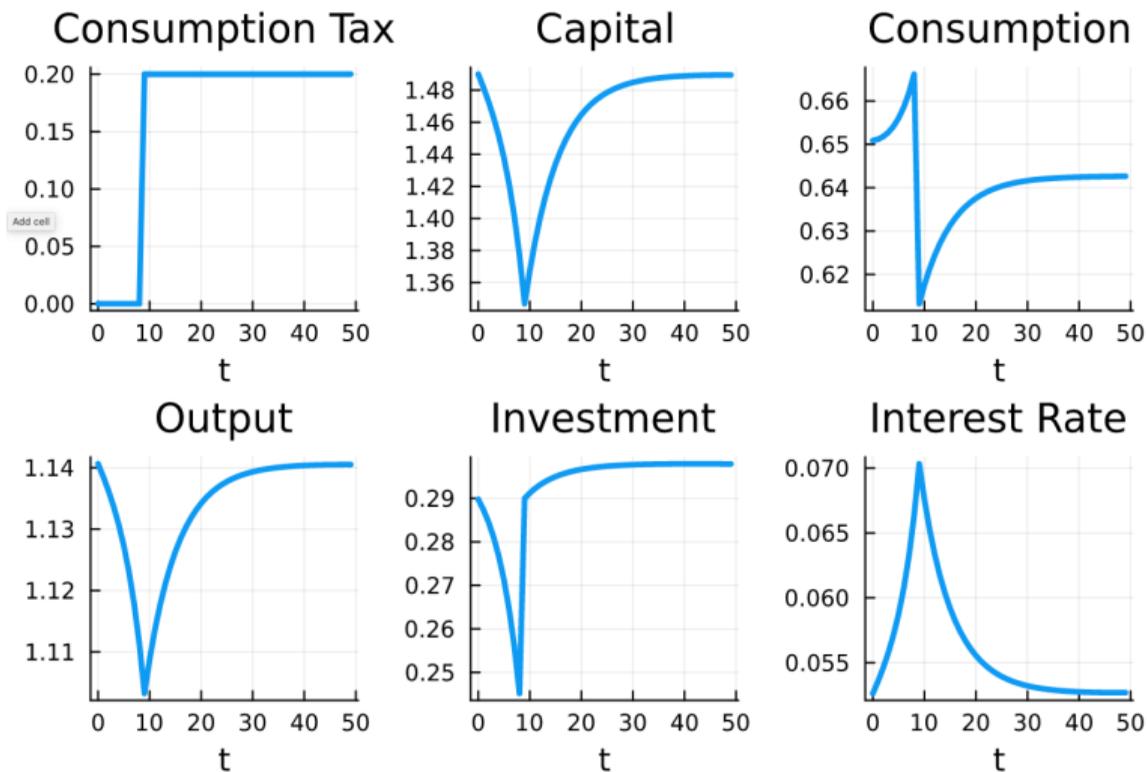
Aumento Transitório do Gasto



Aumento Transitório do Gasto

- De novo um efeito renda negativo (mas em menor magnitude).
- As famílias reduzem o consumo no momento do anúncio e depois reduzem gradualmente para acumular capital antecipando o aumento do imposto no futuro (ou pagando os impostos, caso o governo esteja antecipando a cobrança).
- Intuitivamente, as famílias estão acumulando capital para aumentar a produção no momento do aumento de gastos.
- Durante $t = 10$, o gasto público *crowds-out* o investimento. Após o efeito transitório, as famílias reduzem o investimento e a economia retorna ao estado estacion

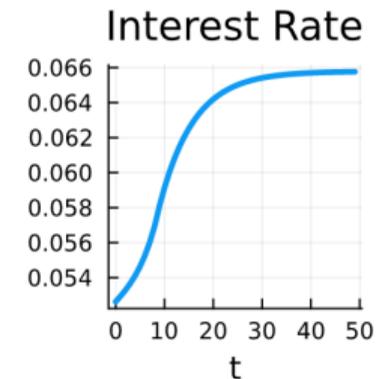
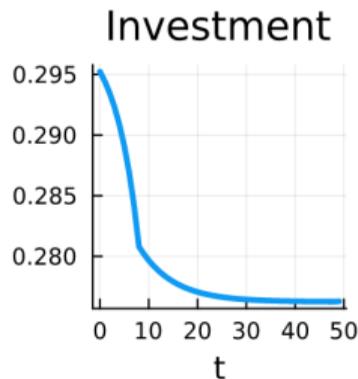
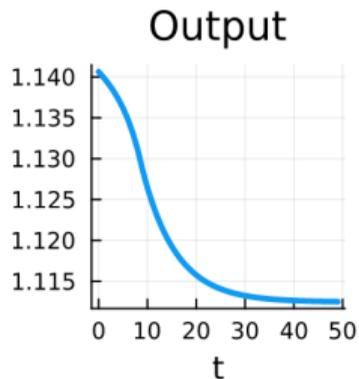
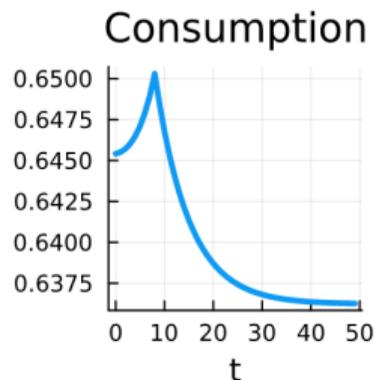
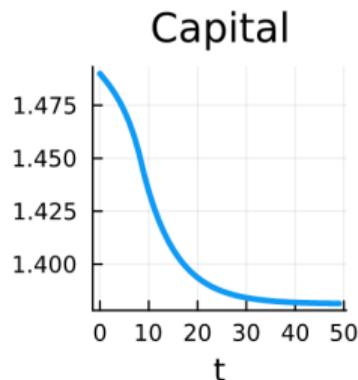
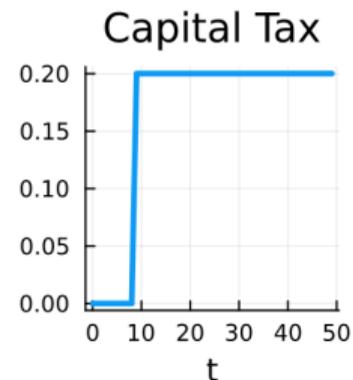
Aumento Permanente do τ^c



Aumento Permanente do τ^c

- As famílias sabem que consumo será taxado no futuro \Rightarrow hora de consumir é agora!
- O aumento do consumo faz com que o investimento se reduza e o capital desaccumule.
- Em $t = 10$, a festa acaba: as famílias reduzem o consumo e começam poupar novamente.
- A economia eventualmente retorna para o mesmo estado estacionário ao custo de um período de austeridade.

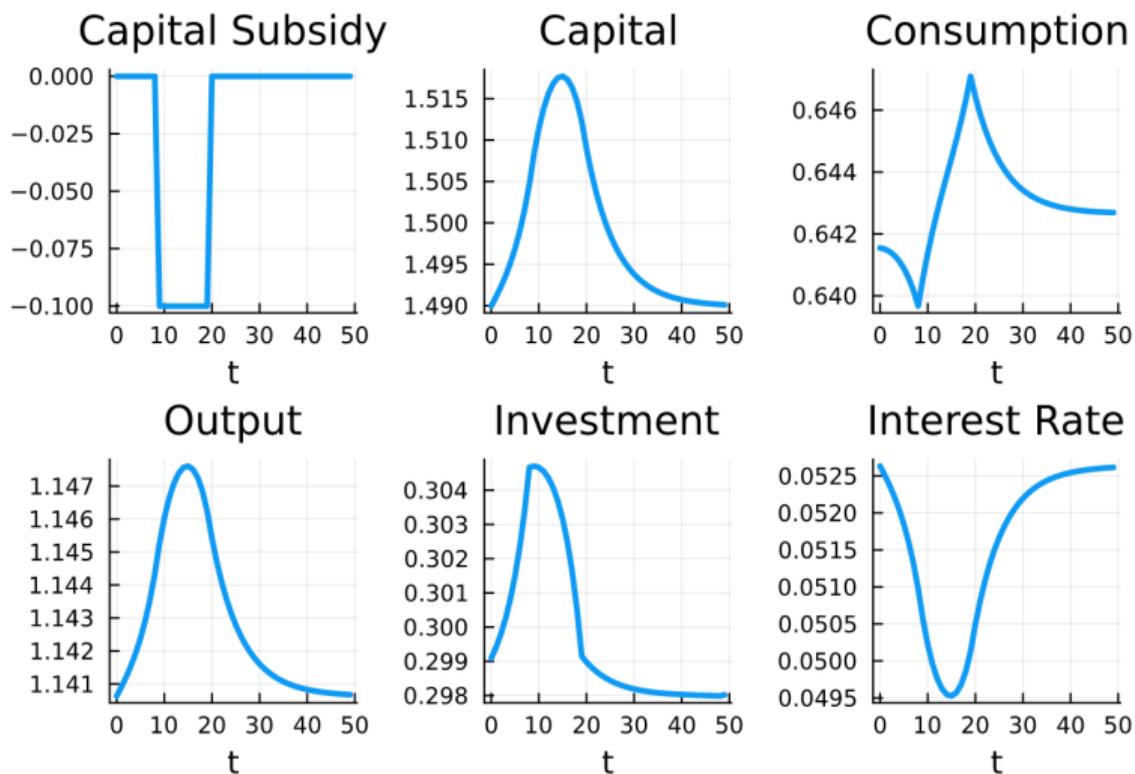
Aumento Permanente do τ^k



Aumento Permanente do τ^k

- O retorno do capital só é taxado no período 10, mas começa a perder valor no período do anúncio.
- As famílias começam a desaccumular capital e aproveitam para consumir mais.
- Eventualmente menos capital reduz a produção e o consumo também cai.
- A economia atinge um novo estado estacionário com menos capital, produção, consumo e maior retorno do capital.

Subsídio Transitório ao Capital



Subsídio Transitório ao Capital

- Sabendo que existirá um subsídio ao capital durante 10 períodos, as famílias reduzem o consumo e se preparam para o evento.
- O investimento aumenta, e o capital se acumula chegando ao topo aproximadamente no período $t = 15$.
- Sabendo que o subsídio irá terminar, as famílias começam a desacumular capital antes mesmo do período 20.
- Dado a sobreacumulação de capital, as famílias aproveitam um alto consumo pós subsídio. Eventualmente a economia retorna ao mesmo estado estacionário.