

Macroeconomia I

Controle Ótimo e Programação Dinâmica em Tempo Contínuo

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Tempo discreto:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

- Tempo contínuo:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c_t) dt$$

- Porque o desconto é exponencial?
- Qual a diferença?
 - ▶ Não há nenhuma diferença substancial. Alguns problemas são naturalmente escritos em tempo discreto, outros em tempo contínuo (ex. *optimal stopping time problems*).
 - ▶ A matemática tende a ser mais elegante, mas as vezes mais complicada.
- Como resolver o problema?

Intuição

- A taxa de desconto entre o tempo discreto e contínuo são equivalentes: $\beta^t = \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^t$.
- **Intuição:** Suponha um período de t de um ano. Podemos calcular os juros composto:

$$\left(\frac{1}{1+r/n}\right)^t \times \cdots \times \left(\frac{1}{1+r/n}\right)^t = \left(\frac{1}{1+r/n}\right)^{nt}$$

- ▶ Se $n = 1$, utilizamos juros anuais. Se $n = 4$, juros trimestrais, etc.
- Em tempo contínuo, $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+r/n}\right)^{nt} = e^{-rt}$$

- **Prova:** defina $s \equiv n/r$, tome o limite $s \rightarrow \infty$, e utilize a regra de L'Hôpital.

Referências

- Acemoglu: Cap 7.
- Notas do Matthias Kredler.

Exemplo: Consumo e Poupança

- Tempo contínuo finito: $t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \max_{c_t} \quad & \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t) dt + e^{-\rho T} V_T(a_T) \\ \text{s.t.} \quad & \frac{\partial a_t}{\partial t} = \dot{a}_t = r a_t + w - c_t, \\ & a_0 \text{ dado e } a_T \geq 0. \end{aligned}$$

onde $V_T(a_T)$ é um valor terminal (exógeno).

- Alternativamente podemos colocar uma condição: $a_T = 0$ (não é uma escolha do agente, mas uma restrição no problema!).
- As soluções c_t e a_t são funções: $c : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo: Consumo e Poupança

- Como encontrar a restrição orçamentária em tempo contínuo?
- Restrição orçamentária para um período Δt :

$$a_{t+\Delta t} = (a_t + w\Delta t - c_t\Delta t)(1 + r\Delta t)$$

- Fluxo vs estoque: a_t é estoque e c_t , w , e r são variáveis de fluxo.
- Re-escrevendo e tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\frac{a_{t+\Delta t} - a_t}{\Delta t} = ra_t + w - c_t + (w - c_t)r\Delta t$$

Tempo Contínuo

- Como resolver o problema?
 - ▶ Cálculo variacional (não iremos ver).
 - ▶ Princípio Máximo de Pontryagin (análogo ao Lagrangiano).
 - ▶ Equação de Hamilton-Jacobian-Bellman (análogo à Equação de Bellman).
- A abordagem aqui será mais “intuitiva” e menos formal. Vamos saltar a maioria dos teoremas e provas.
- Intuitivamente, muito do que vimos para o tempo discreto tem um equivalente para tempo contínuo (princípio da otimalidade, suficiência da transversalidade, etc).
- O Capítulo 7 do Acemoglu é a referência caso você se interesse por mais detalhes.

Princípio Máximo de Pontryagin

Princípio Máximo de Pontryagin

- Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max_{y_t, x_t} \int_0^T f(x_t, y_t, t) dt + M(x_T) \\ \text{s.t. } \dot{x}_t = g(x_t, y_t, t) \\ x_0 \text{ dado.} \end{aligned}$$

- x_t é o vetor estado.
- y_t é o vetor controle.
- f é a função retorno (com desconto implícito).
- g lei de movimento do estado.

Princípio Máximo de Pontryagin

- Defina o Hamiltoniano como:

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)$$

onde λ_t é o coestado (*costate*), é da mesma dimensão de x_t é uma função do tempo.

- **Princípio Máximo de Pontryagin.** Suponha que f e g são continuamente diferenciáveis e que (x_t^*, y_t^*) são soluções interiores contínuas. Logo, existe uma função λ_t^* que satisfaz as condições necessárias:

$$H_x(x_t, y_t, \lambda_t, t) = -\dot{\lambda}_t^* \quad \forall t, \quad (1)$$

$$H_y(x_t, y_t, \lambda_t, t) = 0 \quad \forall t, \quad (2)$$

$$H_\lambda(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \dot{x}_t \quad \forall t. \quad (3)$$

Com a condição terminal $\lambda_T = M_x(x_T)$ (caso a condição terminal seja $a_T = 0$, então $\lambda_T = 0$).

Princípio Máximo de Pontryagin

- Para ter um pouco de intuição, imagine o seguinte Lagrangeano:

$$\mathcal{L}(x_t, y_t, \lambda_t, t) = \int_0^T \underbrace{[f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t) - \lambda_t \dot{x}_t]}_{H(x_t, y_t, \lambda_t, t)} + M(x_T)$$

- λ_t funciona como o “multiplicador” e informa sobre o valor de relaxar as restrições.
- As condições necessárias são análogas as condições de primeira ordem do Lagrangeano acrescentando uma condição “temporal”.

Princípio Máximo de Pontryagin

- Nos casos que a função retorno é descontada exponencialmente por $e^{-\rho t}$ (praticamente todos em economia), é conveniente redefinir o Hamiltoniano como $\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)$:

$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = f(x_t, y_t, t) + \lambda_t g(x_t, y_t, t)$$
$$H(x_t, y_t, \lambda_t, t) = e^{-\rho t} \underbrace{(\hat{f}(x_t, y_t, t) + \mu_t g(x_t, y_t, t))}_{\hat{H}(x_t, y_t, \mu_t, t)}$$

- Onde o multiplicador e o retorno estão em valores correntes:

$$\mu_t = \lambda_t e^{\rho t}, \text{ e } \hat{f}(x_t, y_t, t) = f(x_t, y_t, t) e^{\rho t}.$$

- A única condição que se altera é a (1):

$$\hat{H}_x(x_t, y_t, \mu_t, t) = \rho \mu_t - \dot{\mu}_t^*$$

$$\hat{H}_y(x_t, y_t, \mu_t, t) = 0$$

$$\hat{H}_\lambda(x_t, y_t, \mu_t, t) = \dot{x}_t.$$

Exemplo: Consumo e Poupança

- No problema de Consumo e Poupança

$$\hat{H} = u(c_t) + \mu_t(ra_t + w - c_t)$$

- Logo:

$$r\mu_t = \rho\mu_t - \dot{\mu}_t^* \quad \forall t, \quad (4)$$

$$u'(c_t) = \mu_t \quad \forall t. \quad (5)$$

- Tomando a derivada em relação ao tempo:

$$\dot{\mu}_t = u''(c_t)\dot{c}_t \quad (6)$$

- Substituindo e encontramos equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho) \quad (7)$$

Exemplo: Consumo e Poupança

- A solução é um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(r - \rho)$$
$$\dot{a}_t = ra_t + w - c_t$$

- Alternativamente podemos resolver por \dot{c}_t (utilizando \ddot{a}_t) e encontrar uma equação de segunda ordem.
- Para caracterizar uma solução é necessário uma condição inicial e uma terminal.
 - ▶ Condição inicial: a_0 dado.
 - ▶ Condição terminal: $V_T(a_T)$ ou transversalidade em caso de tempo infinito.
- Note que a elasticidade de substituição intertemporal é igual a

$$\frac{1}{\sigma} = -\frac{u'(c_t)}{u''(c_t)c_t}$$

Onde σ é o coeficiente de aversão ao risco. Que implica na EE: $\dot{c}_t/c_t = (r - \rho)/\sigma$.

Digressão: Solução de Equações Diferenciais

- Suponha uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem:

$$\dot{y}(t) + g(t)y(t) = f(t),$$

- ▶ onde $g(t)$ e $f(t)$ são parâmetros que podem ou não depender de t .
- A solução é dado pela seguinte fórmula:

$$y(t) = \frac{\int_{t_0}^t u(s)f(s)ds + C}{u(t)}$$

- ▶ onde $u(t)$ é o fator de integração dado por:

$$u(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t g(s)ds\right),$$

- ▶ t_0 o tempo inicial e C uma constante arbitrária (que pode ser encontrada com uma condição inicial $y(0)$, ou alguma outra condição).

Exemplo: Consumo e Poupança

- Utilizando as fórmulas, podemos resolver a EE (uma EDO) $\dot{c}_t = c_t(r - \rho)/\sigma$:

$$g(t) \equiv \frac{\rho - r}{\sigma}, \quad f(t) \equiv 0 \quad \text{e} \quad t_0 = 0.$$

- Fator de integração é $u(t) = \exp\left(\int_0^t (\rho - r)/\sigma ds\right) = e^{\frac{(\rho-r)t}{\sigma}}$.
- Logo, para uma constante arbitrária κ_1 , temos a solução:

$$c_t = e^{\frac{(r-\rho)t}{\sigma}} \kappa_1.$$

- Quando $t = 0$, podemos encontrar que a constante é igual ao consumo no período 0:
 $\kappa_1 = c_0$.

Exemplo: Consumo e Poupança

- Substituindo c_t na restrição orçamentária:

$$\dot{a}_t = ra_t + w - c_t \quad \Rightarrow \quad \dot{a}_t - ra_t = w - e^{\frac{(r-\rho)t}{\sigma}} c_0$$

- Podemos aplicar as fórmulas:

$$g(t) \equiv -r, \quad f(t) \equiv w - e^{\frac{(\rho-r)t}{\sigma}} c_0 \quad \text{e} \quad u(t) = \exp\left(\int_0^t -r ds\right) = e^{-rt}.$$

- A poupança ótima a_t para uma constante arbitrária κ_2 é:

$$a_t = e^{rt} \left[\int_0^t e^{rs} \left(w - e^{\frac{(r-\rho)s}{\sigma}} c_0 \right) ds + \kappa_2 \right]$$

Exemplo: Consumo e Poupança

- Resolvendo a integral (suponha $\sigma = 1$ para facilitar):

$$a_t = e^{rt} \left[\int_0^t (we^{-rs} - c_0e^{-\rho s}) ds + \kappa_2 \right] = e^{rt} \left[\frac{w}{r}(1 - e^{-rt}) - \frac{c_0}{\rho}(1 - e^{-\rho t}) + \kappa_2 \right]$$

- Substituindo $t = 0$, encontramos que a constante é igual a condição inicial: $\kappa_2 = a_0$.
- Ainda falta c_0 . Como estamos em tempo finito, utilizamos a condição final: $a_T = 0$:

$$0 = e^{rT} \left[\frac{w}{r}(1 - e^{-rT}) - \frac{c_0}{\rho}(1 - e^{-\rho T}) + a_0 \right]$$

$$c_0 = \frac{\rho}{1 - e^{-\rho T}} \underbrace{\left[\frac{w}{r}(1 - e^{-rT}) + a_0 \right]}$$

valor presente da renda permanente

- Em tempo infinito poderíamos utilizar a *no-Ponzi* como condição terminal.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Programação Dinâmica

- Exatamente como no tempo discreto, podemos representar o problema utilizando a Programação Dinâmica.
- Abordagem mais flexível, principalmente para introduzir incerteza, escolha discreta, etc.
- Mesma solução mas temos que resolver uma equação diferencial parcial em vez de uma equação diferencial ordinária.
- Mais fácil levar o problema para o computador (não iremos ver métodos numéricos).

Bellman's Principle

- Como encontrar a função valor em tempo contínuo?
- Considere o princípio de otimalidade de Bellman para obter a função valor $V(t - \Delta t, a)$:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t, a')\}$$
$$s.t. \quad a' = a + (ra + w - c)\Delta t$$

- ▶ $u(c)\Delta t$: fluxo de utilidade entre os períodos $t - \Delta t$ e t .
 - ▶ $e^{-\rho\Delta t}V(t, a')$: valor de continuação.
 - ▶ $(ra + w - c)\Delta t$: fluxo de renda e consumo.
- Reescreva a equação:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t}V(t, a + (ra + w - c)\Delta t)\}$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Defina $g(\Delta t) \equiv e^{-\rho\Delta}V(t, a + [ra + w - c]\Delta t)$ e tome a expansão de Taylor em torno do ponto $\Delta t = 0$:

$$g(\Delta t) = g(0) + g'(0)\Delta t + o(\Delta)$$

$$g(\Delta t) \approx V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t$$

onde $V_a(t, a)$ é a derivada em relação a a .

- A função valor:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c>0} \{u(c)\Delta t + V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t\}$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Continuando:

$$V(t - \Delta t, a) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + V(t, a) + (-\rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}) \Delta t\}$$
$$\frac{V(t - \Delta t, a) - V(t, a)}{\Delta t} = \max_{c > 0} \{u(c) - \rho V(t, a) + V_a(t, a)\dot{a}\}$$

- Tomando o limite $\Delta t \rightarrow 0$ e encontramos a **Hamilton-Jacobi-Bellman Equation**:

$$-V_t(t, a) + \rho V(t, a) = \max_{c > 0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t, a)\}$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Hamilton-Jacobi-Bellman Equation:

$$-V_t(t, a) + \rho V(t, a) = \max_{c > 0} \{u(c) + (ra + w - c)V_a(t, a)\}$$

- Equação diferencial parcial ($V_t(t, a)$).
- Suposição: V é diferenciável em todos seus argumentos.
- **Intuição:** $V_a(t, a)$ representa o aumento marginal do valor quando a riqueza a aumenta marginalmente \rightarrow note a conexão com o multiplicador μ !
- Se o problema for estacionário (variáveis constante ao longo do tempo): $V_t(t, a) = 0$ e função valor não depende do tempo.

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Estamos interessados na solução do problema. Condição necessária (c.p.o em relação a c):

$$u'(c^*(t, a)) = V_a(t, a)$$

- E a condição de envelope. Diferenciando a HJB em relação a a (avaliado no ótimo $c^*(t, a)$):

$$\begin{aligned} -V_{ta}(t, a) + \rho V_a(t, a) &= \frac{\partial c^*(t, a)}{\partial a} \underbrace{(u'(c^*(t, a)) - V_a(t, a))}_{=0 \text{ (pela cpo)}} + \dots \\ &\dots (ra + w - c^*(t, a))V_{aa}(t, a) + rV_a(t, a) \end{aligned}$$

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Finalmente:

$$V_{ta}(t, a) + \dot{a}V_{aa}(t, a) = -(r - \rho)V_a(t, a)$$

- Defina a solução ótima de $a^*(t)$ utilizando a lei de movimento e $c^*(t, a)$:

$$\dot{a}^*(t) = ra + w - c^*(t, a)$$

- Logo:

$$\frac{dV_a(t, a^*(t))}{dt} = V_{ta}(t, a^*(t)) + \dot{a}^*(t)V_{aa}(t, a^*(t))$$

- Note que $V_t(t, a)$ é a derivada parcial com respeito ao primeiro argumento e $dV(t, a)/dt$ é a derivada total (potencialmente o segundo argumento pode depender de t).

Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

- Utilizando a cpo, e a condição de envelope avaliada no ótimo $a^*(t)$:

$$\frac{\frac{d}{dt}V_a(t, a^*(t))}{V_a(t, a^*(t))} = - (r - \rho)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}u'(c_t)}{u'(c_t)} = - (r - \rho)$$

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = - (r - \rho)$$

- Finalmente encontramos a mesma **Equação de Euler!**

Uma pequena nota sobre Incerteza

- Vamos considerar o processo mais simples em tempo contínuo: processos poisson (*jump processes*).
 - ▶ Casos gerais necessitam uma introdução à cálculo estocástico.
- Considere que w_t segue um processo poisson com estados: $\{w_1, w_2\}$
- A taxa de transição entre o estado i e j é dado por: $\eta_{ij} \geq 0$.
- A probabilidade condicional de “saltar” do estado 1 para o estado 2 no intervalo Δt

$$P(\text{salto para } w_2 \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_1) = 1 - e^{-\eta_{12}\Delta t} \approx \eta_{12}\Delta t + o(\Delta t)$$

onde a aproximação é válida para um Δt próximo de zero.

- Para N estados $w \in \{w_1, \dots, w_N\}$ com Δt pequeno:

$$P(\text{salto para } w_j \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ij} \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P(\text{continuar em } w_1 \text{ no intervalo } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \left(1 - \sum_{j \neq i} \eta_{ij} \Delta t + o(\Delta t) \right)$$

- Probabilidade de 2 saltos no mesmo intervalo é de segunda ordem e desaparece rapidamente quando $\Delta t \rightarrow 0$

$$P(2 \text{ ou } + \text{ saltos: } i \rightarrow k \rightarrow j \text{ em } [t, t + \Delta t] | w_t = w_i) \approx \eta_{ji} \Delta t \times \eta_{kj} \Delta t = \eta_{ji} \eta_{ji} (\Delta t)^2$$

Consumo e Poupança

- Considere o problema de consumo e poupança com $w \in \{w_1, w_2\}$ e $\eta_{12} = \eta_{21} = \eta$:

$$V(t - \Delta t, a, w_1) = \max_{c > 0} \{u(c)\Delta t + e^{-\rho\Delta t} [(1 - \eta\Delta t)V(t, a', w_1) + \eta\Delta tV(t, a', w_2)]\}$$

com $a' = a + (ra + w_1 - c)\Delta t$.

- $(1 - \eta\Delta t)V(t, a', w_1)$ valor de continuação quando w não muda
- $\eta\Delta tV(t, a', w_2)$ valor de continuação quando $w_1 \rightarrow w_2$.

Consumo e Poupança

- Diferencie em Δt e avalie $\Delta t = 0$ (o resultado será o mesmo se utilizarmos a série de Taylor como anteriormente):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V(t - \Delta t, a, w_1)}{\partial \Delta t} \right|_{\Delta t=0} &= -V_t(t, a, w_1) = \\ &= \max_{c>0} \left\{ u(c) + \underbrace{\dot{a}V_a(t, a, w_1)}_{\text{Poupança adicional}} \right\} - \rho V(t, a, w_1) + \underbrace{\eta(V(t, a, w_2) - V(t, a, w_1))}_{\text{Diferença Salarial}} \end{aligned}$$

Note que o efeito de poupar no estado w_2 é de segunda ordem.

- A solução satisfaz as duas HJB simétricas:

$$-V_t(t, a, w_1) + (\rho + \eta)V(t, a, w_1) = \max_{c>0} \{ u(c) - [ar + w_1 - c]V_a(t, a, w_1) \} + \eta V(t, a, w_2)$$

$$-V_t(t, a, w_2) + (\rho + \eta)V(t, a, w_2) = \max_{c>0} \{ u(c) - [ar + w_2 - c]V_a(t, a, w_2) \} + \eta V(t, a, w_1)$$

Consumo e Poupança

- Para encontrar a EE utilizamos a mesma idéia que anteriormente. Suponha que o problema seja estacionário. A cpo de c implica:

$$u'(c^*(a, w)) = V_a$$

- A condição do envelope ($\partial HJB/\partial a$):

$$\rho V_a(a, w) = \eta(V_a(a, \tilde{w}) - V_a(a, w)) + rV(a, w) + \dot{a}V_{aa}(a, w)$$

- Ok, no tempo discreto sabemos que nossa EE é sobre o valor esperado da utilidade marginal de $t + 1$ (i.e. $\mathbb{E}[u'(c_{t+1})]$).
- Qual a definição apropriada deste valor esperado em tempo contínuo?

- **Definição.** Para a função diferenciável f , defina o *Infinitesimal Generator* como o operador \mathcal{A} :

$$\mathcal{A}f(a, w) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_t[f(a_{t+\Delta t}, w_{t+\Delta t})] - f(a_t, w_t)}{\Delta t}$$

- **Intuição:** O *Infinitesimal Generator* descreve como o processo estocástico evolui em um intervalo de tempo.
- Nosso processo estocástico depende de duas variáveis: a_t^* e w_t . Basicamente \mathcal{A} nos diz como a função f evolui em valor esperado dado a_t^* e w_t para um instante t .

- No nosso caso:

$$\mathbb{E}_t[f(a_{t+\Delta t}^*, w_{t+\Delta t})] \approx (1 - \eta\Delta t)f(a_t^* + \dot{a}, w_t) + \eta\Delta t f(a_t^* + \dot{a}, \tilde{w}_t)$$

- É relativamente fácil utilizar a definição e demonstrar que:

$$\mathcal{A}f(a^*, w) = \underbrace{\dot{a}f_a(a, w)}_{\text{Drift em } a} + \underbrace{\eta(f(a^*, \tilde{w}) - f(a^*, w))}_{\text{transição salarial}}.$$

- A condição do envelope pode ser escrita:

$$\underbrace{\dot{a}V_{aa}(a, w) + \eta(V_a(a, \tilde{w}) - V_a(a, w))}_{\mathcal{A}V_a(a, w)} = -(r - \rho)V_a(a, w)$$

- Combinando a cpo com o envelope:

$$\frac{\mathcal{A}V_a(a^*, w)}{V_a(a^*, w)} = - (r - \rho)$$
$$\frac{\mathcal{A}u'(c^*(a, w))}{u'(c^*(a, w))} = - (r - \rho)$$

- Finalmente encontramos a Equação de Euler!
- Onde $\frac{\mathcal{A}u'(c^*)}{u'(c^*)}$ é a taxa de crescimento esperada de u' .

Taking Stock

- Aprendemos o Princípio Máximo de Pontryagin e utilizamos o Hamiltoniano para resolver um problema de controle ótimo.
- Derivamos a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman para o problema de consumo e poupança.
- Utilizamos um processo Poisson para introduzir incerteza.