

Macroeconomia I

Incerteza e Programação Dinâmica Estocástica

Tomás R. Martinez

Universidade de Brasília

Introdução

- Até o presente momento todos os problemas estudados eram determinísticos.
- Incerteza é uma parte importante da dinâmica econômica:
 - ▶ A renda das famílias flutuam individualmente: indivíduos perdem o emprego, recebem aumento, etc.
 - ▶ A produtividade das firmas se altera ao longo do tempo, idéias e novos produtos são introduzidos no mercado.
 - ▶ A economia agregada flutua ao longo do tempo.
- Para estudar incerteza vamos:
 1. Resolver e representar modelos dinâmicos de equilíbrios geral com incerteza.
 2. Relembrar processos estocásticos e cadeias de Markov.
 3. Introduzir a programação dinâmica estocástica.

Referências

- Notas do DK: Cap. 6.
- Acemoglu: Cap. 16
- Stokey and Lucas with Prescott: Cap 8-10.
- Ljungqvist and Sargent: Cap 2, 8.

Incerteza em Equilíbrio Geral

- Um evento (estocástico) no período t : $s_t \in S$. S é o conjunto de eventos possíveis (finito e igual em todo o t).
- Um histórico de eventos é um vetor representado por: $s^t = (s_0, s_1, \dots, s_t)$.
- Formalmente $s^t \in S^t$, onde $S^t = S \times S \times S \dots \times S$.
- A probabilidade de observar um histórico particular de eventos é dado por: $\pi(s^t)$.
- Já a probabilidade conditional de observar s^t após a realização de s^τ : $\pi(s^t | s^\tau)$.
- Em alguns lugares você também pode encontrar a representação de um sub-histórico de s^t como: $s_{\rightarrow t-1}^t$.

Notação

- Agora todos os bens da economia em vez de serem “apenas” indexado por t , também têm que ser indexado pelo histórico de eventos s^t : $c_t(s^t)$.
- Um agente escolhe uma sequência de consumo dependente do histórico de eventos: $\{c_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}$.
- Agentes maximizam a **utilidade esperada**:

$$U(\{c_t(s^t)\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sum_{s^t \in S^t} \pi(s^t) u(c_t(s^t)) = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \right]. \quad (1)$$

- **Exemplo:** Economia de dotação com dois agentes.
- Os agentes $i = \{1, 2\}$ recebem uma dotação $e_t^i(s^t)$ dependendo do histórico de s^t .

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Trocas ocorrem no período 0 antes de qualquer incerteza ser realizada.
- No período 0 agentes trocam consumos em todos os períodos e *possíveis realizações de s^t* .
- Defina o preço de uma unidade de consumo (ou melhor dizendo, *claims* de uma realização de consumo) em t e s^t : $p_t(s^t)$.
- A restrição orçamentária de um agente i no período 0:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) e_t^i(s^t). \quad (2)$$

- *Market clearing* tem que ser sustentado em todas as datas e possíveis históricos de eventos!

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t. \quad (3)$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

Definição. Um equilíbrio competitivo Arrow-Debreu é uma sequência de alocações $\{c_t^1(s^t), c_t^2(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^\infty$ e preços $\{p_t(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^\infty$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{p_t(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^\infty$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^1(s^t), c_t^2(s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}^\infty$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i(s^t) \geq 0\}_{t=0, s^t \in S^t}^\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t(s^t)) \quad (4)$$

$$s.t. \quad \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) c_t^i(s^t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) e_t^i(s^t). \quad (5)$$

2. O mercado de bens está em equilíbrio (*feasibility*):

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t. \quad (6)$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Resolução para um agente arbitrário:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t^i(s^t)) + \lambda^i \left(\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} p_t(s^t) [e_t^i(s^t) - c_t^i(s^t)] \right) \quad (7)$$

- E as cpo...

$$\beta^t \pi(s^t) u'(c_t^i(s^t)) = \lambda^i p_t(s^t) \quad \forall t, s^t, i$$

- Note que ao substituir por λ o agente equaliza a utilidade marginal entre diferentes estados da natureza.

$$\beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \frac{u'(c_t^i(s^t))}{u'(c_0^i(s_0))} = \frac{p_t(s^t)}{p_0(s_0)} \quad \forall t, s^t, i$$

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- A razão da utilidade marginal entre agentes é constante em todo o t e s^t :

$$\frac{u'(c_t^2(s^t))}{u'(c_t^1(s^t))} = \frac{u'(c_0^2(s_0))}{u'(c_0^1(s_0))} \quad \forall t, s^t$$

- Exemplo com u CRRA:

$$\left(\frac{c_t^2(s^t)}{c_t^1(s^t)} \right)^{-\sigma} = \left(\frac{c_0^2(s_0)}{c_0^1(s_0)} \right)^{-\sigma} \quad \forall t, s^t$$

\Rightarrow Razão do consumo entre dois agentes é constante em todo o t e s^t .

- Dado a restrição de recursos: $c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) = e_t(s^t)$: um agente consome uma fração constante θ^i da dotação agregada $e_t(s^t)$.
- Existe **perfect risk sharing** entre os agentes!

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Existe **perfect risk sharing** entre os agentes! Flutuações de consumo são dadas por flutuações da renda agregada e não da renda individual.
- A alocação competitiva não depende do histórico de eventos s^t nem da distribuição das dotações realizadas (as trocas são negociadas no período 0).
- Note a necessidade das suposições de informação perfeita e de que os contratos são executáveis (*full enforcement*).

Estrutura de Mercado: Arrow-Debreu

- Resolver para os preços, utilizamos otimalidade + restrição de recursos:

$$\begin{aligned} p_t(s^t) &= \beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \left(\frac{c_t^i(s^t)}{c_0^i(s_0)} \right)^{-\sigma} \\ &= \beta^t \frac{\pi(s^t)}{\pi(s_0)} \left(\frac{e_t(s^t)}{e_0(s_0)} \right)^{-\sigma} \end{aligned}$$

- Ou seja, o “preço” do consumo em um estado da natureza s^t depende da probabilidade que este estado seja realizado e da quantidade de riqueza (agregada).
- O preço de um seguro em um período de “vacas magras” é alto já que nenhum agente quer distribuir seus dotes.

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Agora vamos definir um mercado sequencial. Em todos os períodos os mercados abrem e as trocas ocorrem.
- Para equivalência entre um mercado do tipo Arrow-Debreu e um mercado sequencial com incerteza precisamos entregar uma unidade de consumo em **todos os estados da natureza**.
- Isto é: eu posso comprar um contrato ao preço de $q_t(s_{t+1}, s^t)$ no período t e histórico s^t que me entregue uma unidade de consumo no período seguinte e com evento s_{t+1} , para cada evento s_{t+1} .
- O agente poderá, no período t , se proteger completamente de qualquer evento que ocorrerá em $t + 1$ comprando um contrato para cada s_{t+1} .
- Estes instrumentos financeiros são conhecidos como: **Arrow securities**.
- No caso que seja possível negociar *Arrow securities* em todos os períodos e estados da natureza Arrow (1964) mostra que podemos negociar bens entre diferentes t e s^t (ou seja, mercados completos) implementar mercados completos (livre troca entre bens).

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Defina $a_{t+1}(s_{t+1}, s^t)$ como a quantidade de Arrow securities comprada pelos agentes no período t .
- A restrição orçamentária de um agente arbitrário i em t e s^t :

$$c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q(s_{t+1}, s^t) \leq e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t)$$

- Note que os agentes compram Arrow securities em t para todas as contingências $s_{t+1} \in S$, mas logo que s_{t+1} é realizado a posição financeira de $t + 1$ é apenas $a_{t+1}(s_{t+1}, s^t)$ correspondente ao estado realizado.
- O mercado de Arrow securities precisa igualar a zero em todos os períodos e eventos.

Estrutura de Mercado: Sequencial

Definição. Um equilíbrio competitivo com Mercados Sequenciais é uma sequência de alocações $\{c_t^i(s^t), a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t),\}_{t=0, i=1,2, s^t \in S^t}$ e preços $\{q(s_{t+1}, s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}$ dado que:

1. Dado a sequência de preços $\{q(s_{t+1}, s^t)\}_{t=0, s^t \in S^t}$, para $i = 1, 2$, $\{c_t^i(s^t), a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t),\}_{t=0, i=1,2, s^t \in S^t}$ é a solução do problema:

$$\max_{\{c_t^i > 0, a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)\}_{t=0}} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t(s^t)) \quad (8)$$

$$s.t. \quad c_t^i(s^t) + \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) \leq e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t) \quad \forall t, s^t \quad (9)$$

$$a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) \geq -\bar{A}^i \quad \forall t, s^t; \quad a_0^i \text{ dado.} \quad (10)$$

2. O mercado de bens e de ativos (títulos) estão em equilíbrio:

$$c_t^1(s^t) + c_t^2(s^t) = e_t^1(s^t) + e_t^2(s^t) \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t \quad (11)$$

$$a_{t+1}^1(s_{t+1}, s^t) + a_{t+1}^2(s_{t+1}, s^t) = 0 \quad \forall t \text{ e } s^t \in S^t \text{ e } s_{t+1} \in S \quad (12)$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Resolução para um agente arbitrário:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\sum_{s^t \in S^t} \beta^t \pi(s^t) u(c_t^i(s^t)) + \dots \right. \\ \left. \dots \sum_{s^t \in S^t} \lambda_t^i(s^t) \left[e_t^i(s^t) + a_t^i(s^t) - c_t^i(s^t) - \sum_{s_{t+1}} a_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) \right] \right)$$

- E as cpo (onde $\lambda_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)$ é o multiplicador para s_{t+1} dado um histórico s^t) ...

$$\beta^t \pi(s^t) u'(c_t^i(s^t)) = \lambda_t^i(s^t) \quad \forall t, s^t, i$$

$$\lambda_t^i(s^t) q_t(s_{t+1}, s^t) = \lambda_{t+1}^i(s_{t+1}, s^t)$$

- Note a equivalência entre Arrow-Debreu e sequencial quando:

$$q_t(s_{t+1}, s^t) = \frac{p_{t+1}(s^{t+1})}{p_t(s^t)}$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Ou seja, a função preço (*pricing kernel*) é:

$$q_t(s_{t+1}, s^t) = \beta \frac{u'(c_{t+1}^i(s^{t+1}))}{u'(c_t^i(s^t))} \pi(s^{t+1}|s^t)$$

onde $\pi(s^{t+1}|s^t) = \pi(s_{t+1}, s^t)/\pi(s^t)$.

- O preço de **um** Arrow security associado ao estado s_{t+1} . Lembre-se que as Arrow-securities pagam apenas em um estado da natureza (nos outros pagam 0).
- A *pricing kernel* é bastante usada em macro-finance e partir dela podemos precificar variados ativos.
- Por exemplo, podemos precificar o preço de um título livre de risco (não contingente ao estado) como:

$$\sum_{s_{t+1}|s^t} q_t(s_{t+1}, s^t) = R_t^{-1}.$$

Estrutura de Mercado: Sequencial

- Ou seja, o preço de **full consumption insurance** em t , é a soma dos preços das Arrow securities associada a todos os eventos s_{t+1} :

$$\sum_{s_{t+1}|s^t} q_t(s_{t+1}, s^t) = \beta \sum_{s_{t+1}|s^t} \frac{u'(c_{t+1}^i(s^{t+1}))}{u'(c_t^i(s^t))} \pi(s^{t+1}|s^t)$$

- Note que $\sum_{s_{t+1}} \pi(s^{t+1}|s^t) u'(c_{t+1}^i(s^{t+1})) = \mathbb{E}_t [u'(c_{t+1}^i)]$ é a utilidade marginal do consumo esperada condicional a informação em t .
- Finalmente podemos re-escrever a Euler Equation:

$$u'(c_t^i(s^t)) = \beta R_t \mathbb{E}_t [u'(c_{t+1}^i(s^{t+1}))] \quad \forall t, s^t.$$

Cadeias de Markov

Introdução

- Até o presente momento não especificamos a estrutura da incerteza: a princípio um evento pode depender de todo o histórico de eventos anteriores.
- Em macro a incerteza será basicamente modelada como Cadeias de Markov e equações de diferenças lineares de primeira ordem (por exemplo um AR(1)).
- Ou seja, vamos ignorar o histórico e concentrar apenas na última realização.
- Mas nada nos impede de especificar processos estocásticos mais gerais!

Cadeias de Markov

- **Definição:** Seja $x_t \in X$, onde $X = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ é um conjunto finito de valores. Uma Cadeia de Markov Estacionária é um processo estocástico $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ definido por X , uma matriz de transição $P_{n \times n}$, e uma distribuição de probabilidade inicial π_0 (vetor $1 \times n$) para x_0 .
- **Propriedade Markoviana:** Um processo estocástico $\{x\}$ possui a Propriedade Markoviana se para todo $k \geq 1$ e todo t : $Prob(x_{t+1}|x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-k}) = Prob(x_{t+1}|x_t)$.
- Os elementos de $P_{n \times n}$ representam as probabilidades: $P_{ij} = Prob(x_{t+1} = \bar{x}_j | x_t = \bar{x}_i)$.

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots \\ \vdots & \ddots & \\ P_{n1} & & P_{nn} \end{bmatrix}$$

- Para todo i : $\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1$.

Cadeias de Markov

- A matriz de transição define as probabilidades de mover de um estado i para o estado j em um período.
- A probabilidade de sair de um estado para outro em dois períodos: P^2 .

$$Prob(x_{t+2} = \bar{x}_j | x_t = \bar{x}_i) = \sum_{k=1}^n P_{ik} P_{kj} \equiv P_{ij}^{(2)},$$

onde $P_{ij}^{(2)}$ é o elemento (i, j) de P^2 .

- Dado o vetor π_0 , π_1 é a probabilidade incondicional de x_1 : $\pi_1 = \pi_0 P$.
- De maneira análoga: $\pi_2 = \pi_0 P^2$, $\pi_t = \pi_0 P^t$ e $\pi_{t+1} = \pi_t P$

- **Definição:** Uma distribuição incondicional **estacionária** para P é um vetor de probabilidade π que $\pi = \pi P$.
- Logo uma distribuição estacionária satisfaz:

$$\begin{aligned}\pi I &= \pi P, \\ \pi I - \pi P &= \pi[I - P] = 0.\end{aligned}$$

Isto é, π é um autovetor de P (normalizado $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$), com um autovalor unitário.

- O fato de P ter elementos não negativos e linhas que somam a um garante que P tenha pelo menos um autovetor e autovalor.
- Mas a distribuição estacionária não necessariamente é única.

- Exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A matriz P tem dois autovalores unitários associados as distribuições estacionárias $\pi = [1 \ 0 \ 0]$ e $\pi = [0 \ 0 \ 1]$.
- Note que qualquer distribuição inicial com massa 0 no segundo estado é uma distribuição estacionária.
- Os estados 1 e 3 são estados absorventes, uma vez que você entra neles nunca sairá.

Cadeias de Markov

- Seja π_∞ o único vetor que satisfaça $\pi_\infty = \pi_\infty P$ e, se para todas as distribuições iniciais π_0 :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \pi_0 P^t = \pi_\infty$$

- Então podemos dizer que a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária com uma distribuição invariante única.
- **Teorema:** Seja P uma matriz de transição com $P_{ij} > 0 \forall (i, j)$. Logo P tem uma distribuição invariante única e a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária.
- **Teorema:** Seja P uma matriz de transição com $P_{ij}^n > 0 \forall (i, j)$, para algum $n \geq 1$. Logo P tem uma distribuição invariante única e a Cadeia de Markov é assintoticamente estacionária.
- Intuitivamente tem que ser possível ir de um estado a outro em um (teorema 1) ou n passos (teorema 2).

Programação Dinâmica Estocástica

Programação Dinâmica Estocástica

- A maior vantagem da programação dinâmica aparece quando introduzimos incerteza.
- Quando representamos o processo estocástico como uma Cadeia de Markov apenas a última realização é suficiente \Rightarrow não há necessidade de escrever todo o histórico.
- Os teoremas são semelhantes aos anteriores com algumas modificações em consideração ao processo estocástico z .
 - ▶ Referências: Acemoglu ou SLP.

Programação Dinâmica Estocástica: Crescimento Estocástico

- Suponha que z_t seja uma Cadeia de Markov de primeira ordem com densidade condicional $f(z'|z)$.
 - ▶ O valor de z contém informação sobre o problema no período t e sobre a esperança do período $t + 1$.
- Suponha que a função de produção dependa de z na seguinte maneira: zk^α .
- A equação de Bellman para o modelo neoclássico:

$$V(k, z) = \max_{k' \in [0, zk^\alpha + (1-\delta)k]} \{u(zk^\alpha + (1-\delta)k - k') + \beta \mathbb{E}[V(k', z')|z]\},$$

onde $\mathbb{E}[V(k', z')|z] = \int V(k', z')f(z'|z)dz'$.

- Com a função política: $k' = g(k, z)$.

- CPO:

$$u'(zk^\alpha + (1 - \delta)k - k) = \beta \mathbb{E}[V_k(k', z')|z]$$

- E a condição de envelope:

$$V_k(k', z') = u'(z'k'^\alpha + (1 - \delta)k' - k'')(z'\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)$$

- Equação de Euler estocástica:

$$u'(c(k, z)) = \beta \mathbb{E}[u'(c(k', z'))(z'\alpha k'^{\alpha-1} + 1 - \delta)|z]$$

- Onde a $c(k, z)$ é a função política de consumo.

Modelo de Crescimento (estocástico)

- Choque: $z \in \mathbb{R}^+$.
- Estado: z e k .
- Controle: k' .
- Conjunto Possível: $k' \in \Gamma(k, z) = [0, zk^\alpha + (1 - \delta)k]$.
- Função Retorno: $F(k, z, k') = u(zk^\alpha + (1 - \delta)k - k')$
- Lei do Movimento do Estado: $(k', z') = h(k', z'; z, k) = (k', z')$ (trivial).
- Equação de Bellman:

$$V(k, z) = \max_{k' \in \Gamma(k, z)} \{F(k, z, k') + \beta \mathbb{E}[V(k', z') | z]\}$$

Forma geral

- Choque: $z \in \mathbb{R}^n$.
- Estado: $x \in \mathbb{R}^l$ ($z^{(i)}$ pode estar incluído ou não!).
- Controle: $y \in \mathbb{R}^m$.
- Conjunto Possível: $y \in \Gamma(x)$, $\Gamma : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- Função Retorno: $F(x, y)$, $F : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$.
- Lei do Movimento do Estado: $x' = h(x, y, z')$, $h : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$.
- Equação de Bellman:

$$V(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \{F(x, y) + \beta \mathbb{E}[V(\underbrace{h(x, y, z')}_{x'})|z]\}$$

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

- Suponha um indivíduo (com vida infinita) que consome c , poupa a e tem renda *iid* w . Utilidade segue as suposições padrão.
- Restrição orçamentária:

$$c + a' \leq a(1 + r) + w.$$

- O empréstimo está limitado pela restrição $a \geq -b$.
- A equação de Bellman:

$$V(a, w) = \max_{a' \in [-b, a(1+r)+w]} \{u(a(1+r) + w - a') + \beta \mathbb{E}[V(a', w')]\}$$

- Podemos reduzir os estados ainda mais?
 - ▶ A variável estado é menor conjunto de variáveis que nos permitem definir: o conjunto possível, a função retorno, a lei de movimento e esperança condicional da equação de Bellman.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Cash-on-hand

- Defina a variável “cash-on-hand”: $x \equiv a(1 + r) + w$.
 - ▶ Estado: x . Controle: a' (ou c).
 - ▶ $\Gamma(x) = [-b, x]$; $F(x, a') = u(x - a')$.
 - ▶ Lei de movimento: $x' = h(a', w') = a'(1 + r) + w'$.
- A equação de Bellman:

$$V(x) = \max_{a' \in [-b, x]} \{u(x - a') + \beta \mathbb{E}[V(h(a', w'))]\}$$

- Variáveis de estado diminuiu de (a, w) para x .
- Frequentemente reduzir o número de variáveis de estado acaba sendo de grande valor para fins analíticos e computacionais (lembre-se do *curse of dimensionality*).

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Cash-on-hand

- Equação de Euler:

$$u'(c) = \beta(1 + r)\mathbb{E}[u'(c')]$$

- O que determina a taxa de poupança dos indivíduos?
- Três motivos:
 1. Substituição intertemporal: β vs $(1 + r)$.
 2. Suavização de consumo: desejo de suavizar os diferentes choques (contemporâneos) na renda.
 3. Poupança precaucionária: seguro contra choques futuros.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

Poupança precaucionária

- Suponha apenas dois períodos, $\beta(1+r) = 1$ e que $w_1 = \bar{w}$ (determinístico).

$$u'(a_0(1+r) + w_0 - a_1) = u'(a_1(1+r) + \bar{w} - a_2)$$

- Com apenas 2 períodos: $a_2 = 0$.
- Suponha $w = \bar{w} + \varepsilon$, onde $\varepsilon \sim G(\sigma)$ com média zero e variância σ .
- Como o comportamento dos indivíduos se alteram quando aumenta o risco (i.e. antes w era determinístico e agora estocástico)?
- Se a utilidade marginal é convexa $u'''(c) > 0$, então pela desigualdade de Jensen:

$$\mathbb{E}[u'(a_1(1+r) + \bar{w} + \varepsilon)] > u'(a_1(1+r) + \bar{w})$$

- Logo se a utilidade marginal é convexa, risco gera poupança precaucionária.

Exemplo: Consumo e Poupança com Renda Estocástica

- Aversão ao risco: curvatura de $u()$.
- Prudência (*prudence*): curvatura da utilidade marginal $u'()$.

$$u'(a_0(1+r) + w_0 - a_1) = u'(a_1(1+r) + w_1 - a_2)$$

- CRRA: $u'' < 0$ (aversão ao risco) e $u''' > 0$ (prudência).
- Utilidade quadrática:

$$u(c) = -\frac{1}{2}(\bar{c} - c)^2$$

- $u'' < 0$ (aversão ao risco) e $u''' = 0 \rightarrow$ não há prudência!

Exemplo: McCall Search Model

- Tempo infinito: $t = 1, 2, \dots, \infty$.
- Cada período o agente recebe uma oferta *iid* de salário w de uma c.d.f $F(w)$ com suporte $[0, \bar{w}]$.
- Decisão:
 - ▶ Se aceitar (A): recebe w no período atual e para sempre (não há demissão).
 - ▶ Se rejeitar (R): recebe $b \in (0, \bar{w})$ no período atual e recebe uma nova oferta no período seguinte.
- Utilidade linear e $\beta \in (0, 1)$: o agente maximiza: $\mathbb{E}_0[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t y_t]$, onde y_t é igual a b ou w .
- Equação de Bellman:
 - ▶ Aceite (A): $V^A(w) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t w = \frac{w}{1-\beta}$,
 - ▶ Rejeite (R): $V^R(w) = b + \beta \mathbb{E}[V(w')] = b + \beta \int_0^{\bar{w}} V(w') f(w') dw'$.
 - ▶ $V(w) = \max\{V^A(w), V^R(w)\}$.

Exemplo: McCall Search Model

- **Solução:** encontrar o salário de reserva w^*

$$g(w) = \begin{cases} A & \text{se } w \geq w^*, \\ R & \text{se } w < w^*. \end{cases} \quad (13)$$

- Caracterizado pela condição de indiferença:

$$V^A(w^*) = V^R(w^*) \iff \frac{w^*}{1-\beta} = b + \beta \int_0^{\bar{w}} V(w') f(w') dw' \quad (14)$$

- **Exercício:** mostre que

$$w^* - b = \frac{\beta}{1-\beta} \int_{w^*}^{\bar{w}} w' - w^* f(w') dw', \quad (15)$$

LHS: custo de oportunidade ao rejeitar a oferta w^* . RHS: benefício esperado de procurar mais uma vez (*option value*).

- Mostre que w^* é crescente em b (dica: utilize o teorema da função implícita).

Exemplo: Firma com Decisão de Saída

- Suponha uma firma com função de produção: $y = f(z, n) = zn^\alpha$ e $\alpha < 1$, onde n é o número de trabalhadores contratados, e z é a produtividade.
 - ▶ z segue uma cadeia de Markov com densidade condicional $F(z'|z)$ monótona.
 - ▶ A firma contrata trabalhadores em um mercado competitivo por salário w , e vende o bem final por $p = 1$.
- Todos os períodos, antes de saber a realização de z , a firma decide se opera ou sai do mercado.
 - ▶ Se ela decide operar, tem que pagar o custo fixo wc_f . Caso decida sair do mercado, ela paga zero, mas não pode voltar operar nunca mais.
 - ▶ A firma desconta lucros futuros por β .
- Escreva a função valor da firma. Quais são os controle(s), estado(s), e função retorno? O que podemos dizer sobre a decisão de saída da firma e a sua produtividade?

Exemplo: Firma com Decisão de Saída

- Note que o lucro de um período de uma firma com produtividade z é dado por:

$$\pi(z; p, w) = \max_n \{ pzn^\alpha - wn - wc_f \} \quad \Rightarrow \quad n^d(z; p, w) = \left(\frac{\alpha pz}{w} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

e o lucro é:

$$\pi(z; p, w) = (1 - \alpha)(pz)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} - c_f.$$

- ▶ Suponha que para $c_f > 0$, existe um z tal qual $\pi = 0$.
- Sabendo z , o lucro é dado. A única decisão da firma é a saída (ou não) do mercado:

$$V(z) = \pi(z; p, w) + \beta \max \left\{ \int V(z') dF(z'|z), 0 \right\}$$

Exemplo: Firma com Decisão de Saída

- Dado que o lucro é crescente em z e F é monótona, a função valor é crescente em z .
- Existe um cut-off \tilde{z} tal qual, para todo $z < \tilde{z}$ a firma decide pela saída.
- Podemos encontrar o cut-off igualando o valor esperado da firma com seu valor de saída:

$$\mathbb{E}[V(z')|\tilde{z}] = \int V(z')dF(z'|\tilde{z}) = 0$$

- Isso NÃO significa que a firma nunca terá lucro negativo. Ela pode ter lucro negativo por alguns períodos, se esperar reversão a média do seu z no futuro.

Exemplo: Iteração da Função Valor

- Para resolver a função no computador utilizaremos o mesmo método que anteriormente: iterar função valor com *grid search* para a maximização.
- A única mudança chave é como lidar com o processo markoviano.
- Se ele for discreto não precisamos fazer nada!
- Se ele for contínuo precisamos utilizar algum método de discretização:
 - ▶ Os mais conhecidos (aplicados a um $AR(1)$): Tauchen e Rouwenhorst.
- Existem maneiras alternativas de computar uma esperança condicional no computador.
 - ▶ Lembre-se que a esperança é basicamente uma integral \rightarrow computar uma esperança é computar uma integral numericamente.
- **Exemplo:** Stochastic Growth Model (com $\delta = 1$).

Iteração da Função Valor

1. Discretize k em um vetor com n_k pontos entre \underline{K} e \overline{K} . Defina os pontos na grade como $\{K_1, K_2, \dots, K_I\}$.
2. Discretize z como um processo de markov com n_z pontos. Isto implica em um vetor de valores para $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_{n_z}\}$ e uma matriz de transição $P_{n_z \times n_z}$.
3. A função valor será armazenada em uma matriz $n_k \times n_z$: $\{V_{ij}\}$. Inicie a matriz com seu "chute" V^0 (cada ponto de V_{ij} é o valor associado ao capital k_i e a produtividade z_j).
4. Compute a esperança da função valor ($\mathbb{E}[V_{ij}] = VP'$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1n_z} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ V_{n_k 1} & \dots & \dots & V_{n_k n_z} \end{bmatrix}}_{V_{n_k \times n_z}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & \dots & P_{n_z 1} \\ P_{12} & \ddots & \ddots & \\ P_{1n_z} & \dots & \dots & P_{n_z n_z} \end{bmatrix}}_{P'_{n_z \times n_z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{E}[V_{11}] & \mathbb{E}[V_{12}] & \dots & \mathbb{E}[V_{1n_z}] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \mathbb{E}[V_{n_k 1}] & \dots & \dots & \mathbb{E}[V_{n_k n_z}] \end{bmatrix}}_{\mathbb{E}[V]}$$

Note que $\mathbb{E}[V_{ij}] = \sum_{m=1}^{n_z} P_{jm} V_{im}$ (esperança condicional a j).

Iteração da Função Valor

- O resto é padrão:
- Compute V_{ij}^{n+1} utilizando o procedimento para todo i e j (*grid search* ou *brute force*):

$$V_{ij,l}^{n+1} = \begin{cases} u(z_j f(k_i) - k_l) + \beta \mathbb{E} V_{lj}^n, & \text{se } z_j f(k_i) - k_l = c_{ij,l} > 0 \\ -\infty, & \text{se } z_j f(k_i) - k_l = c_{ij,l} \leq 0 \end{cases}$$

$$V_{ij}^{n+1} = \max\{V_{ij,1}^{n+1}, V_{ij,2}^{n+1}, \dots, V_{ij,n_K}^{n+1}\}$$

- Calcule $d = \max_{i,j} |V_{ij}^{n+1} - V_{ij}^n|$. Se $d < \varepsilon$, encontramos a função valor $V_{n+1} = V$. Caso contrário atualize o chute, $V_n = V_{n+1}$ e retorne ao ponto anterior.

Taking Stock

- Vimos como representar a incerteza em modelos de equilíbrio geral.
 - ▶ Notação geral mas complicada e “pesada”.
- A maioria dos processos estocásticos utilizados na macroeconomia são *iid* ou dependem apenas da última realização: cadeias de Markov!
- Bastante conveniente para introduzir e representar com programação dinâmica.