Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Parcial 2023.1

Instruções:

- Coloque o seu nome na primeira página da prova.
- A prova consiste em 3 perguntas totalizando 60 pontos mais 7 pontos extras.
- A duração total da prova é de 2 horas.
- Consulta a qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas.
- Mantenha a prova organizada e as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Economia de Dotação com 2 agentes, 2 períodos e 2 estados - 25 pontos + 7 extra).** Considere uma economia de trocas onde dois agentes vivem por dois períodos, $t = 1$ e $t = 2$. No período 1, não há incerteza e todas as dotações são conhecidas, mas no período 2 existem dois possíveis estados da natureza: s_1 e s_2.

   A probabilidade da economia estar no estado s_1 é dado por $\pi(s_1) \in (0, 1)$, enquanto a probabilidade de estar em s_2 é $\pi(s_2)$, onde $\pi(s_1) + \pi(s_2) = 1$. A função utilidade para o agente $i = 1, 2$ é:

$$\ln(c_1^i) + \beta\pi(s_1)\ln(c_2^i(s_1)) + \beta\pi(s_2)\ln(c_2^i(s_2)),$$

   onde $c_2^i(s)$ é o consumo do agente i no período 2 e estado s. As dotações em cada período e estado são:

   - Período 1: agente 1 recebe $e_1^1 = \hat{e}$, agente 2 não recebe nada, $e_1^2 = 0$.
   - Período 2, estado s_1: agente 1 recebe $e_2^1(s_1) = \hat{e}$, agente 2 não recebe nada, $e_2^2(s_1) = 0$.
   - Período 2, estado s_2: agente 1 não recebe nada, $e_2^1(s_2) = 0$, agente 2 recebe $e_2^2(s_2) = \hat{e}$.

   (a) (9 pontos) Descreva o problema de um agente arbitrário i em uma estrutura Arrow-Debreu (trocas no período 0). Encontre as condições de primeira ordem do agente e derive a relação entre o consumo do primeiro período e do segundo dados os preços, $p_2(s)$ e da probabilidade de um evento, $\pi(s)$, onde $s \in \{s_1, s_2\}$. Normalize o preço do bem no primeiro período para 1.

   Solução: O problema de um agente i é:

$$\begin{aligned} &\max_{\{c_1^i, c_2^i(s_1), c_2^i(s_2)\}} \{\ln(c_1^i) + \beta\pi(s_1)\ln(c_2^i(s_1)) + \beta\pi(s_2)\ln(c_2^i(s_2))\} \\ s.t. \quad & c_1^i + p_2(s_1)c_2^i(s_1) + p_2(s_2)c_2^i(s_2) \le e_1^i + p_2(s_1)e_2^i(s_1) + p_2(s_2)e_2^i(s_2), \end{aligned}$$

   note que normalizamos $p_1 = 1$. O Lagrageano (considerando a restrição com igualdade) é:

$$\mathcal{L} = \ln(c_1^i) + \beta\pi(s_1)\ln(c_2^i(s_1)) + \beta\pi(s_2)\ln(c_2^i(s_2)) + \dots$$
$$\dots\lambda^i(e_1^i + p_2(s_1)e_2^i(s_1) + p_2(s_2)e_2^i(s_2) - c_1^i - p_2(s_1)c_2^i(s_1) - p_2(s_2)c_2^i(s_2))$$

Tomando as c.p.o:

$$\frac{1}{c_1^i} = \lambda^i$$
$$\frac{\beta\pi(s_1)}{c_2^i(s_1)} = \lambda^i p_2(s_1)$$
$$\frac{\beta\pi(s_2)}{c_2^i(s_2)} = \lambda^i p_2(s_2).$$

Substituindo as cpo em λ^i, encontramos uma relação de consumo com os preços relativos para um agente arbitrário i, e evento arbitrário $s \in \{s_1, s_2\}$:

$$\frac{c_2^i(s)}{c_1^i} = \frac{\beta\pi(s)}{p_2(s)}$$

(b) (7 pontos) Escreva as condições de equilíbrio desta economia.

Solução: As condições de equilíbrio desta economia é o equilíbrio no mercado de bens em $t = 1, 2$ e para um evento arbitrário $s \in \{s_1, s_2\}$

$$c_1^1 + c_1^2 = e_1^1 + e_1^2 = \hat{e}$$
$$c_2^1(s) + c_2^2(s) = e_2^1(s) + e_2^2(s) = \hat{e}$$

Note que em todos os estados da natureza a dotação agregada desta economia é $\hat{e}$.

(c) (9 pontos) Encontre uma equação que descreve o preço no período 2 para um estado da natureza arbitrário s, $p_2(s)$, em função dos parâmetros do modelo. Como $p_2(s)$ se altera quando a probabilidade de s ocorrer, $\pi(s)$, aumenta?

Dica: combine a relação de consumo entre o primeiro e segundo período da letra (a) com as condições de equilíbrio da letra (b).

Solução: Somando a relação de consumo $\frac{c_2^i(s)}{c_1^i} = \frac{\beta\pi(s)}{p_2(s)}$ para o agente $i = 1, 2$:

$$c_2^1(s) + c_2^2(s) = \frac{\beta\pi(s)}{p_2(s)}(c_1^1 + c_1^2).$$

Substituindo as condições de equilíbrio:

$$\hat{e} = \frac{\beta\pi(s)}{p_2(s)}\hat{e},$$

encontramos a função preço:

$$p_2(s) = \beta\pi(s),$$

onde claramente o preço do bem final no estado s aumenta linearmente com a probabilidade do estado ocorrer $\pi(s)$. Note que ao contrário do que vimos em sala, o preço não depende da dotação. Isso ocorre porque a dotação agregada é igual em todos os períodos e estados da natureza.

(d) (Extra: 7 pontos) Defina $\theta \equiv c_1^1/(c_1^1 + c_1^2)$ como a fração do consumo do agente 1 no período 1 em relação ao total. Mostre que quando $\pi(s_1) \to 1$, $\theta \to 1$.

Solução: Considere a restrição orçamentária de um agente i:

$$e_1^i + p_2(s_1)e_2^i(s_1) + p_2(s_2)e_2^i(s_2) = c_1^i + p_2(s_1)c_2^i(s_1) + p_2(s_2)c_2^i(s_2).$$

Utilizando $\frac{c_2^i(s)}{c_1^i} = \frac{\beta\pi(s)}{p_2(s)}$, e substituindo em $c_2^i(s_1)$ e $c_2^i(s_2)$:

$$e_1^i + p_2(s_1)e_2^i(s_1) + p_2(s_2)e_2^i(s_2) = c_1^i(1 + \beta\pi(s_1) + \beta\pi(s_2)),$$

Utilizando $\pi(s_1) + \pi(s_2) = 1$, e substituindo pela equação dos preços, $p_2(s) = \beta\pi(s)$:

$$e_1^i + \beta\pi(s_1)e_2^i(s_1) + \beta\pi(s_2)e_2^i(s_2) = c_1^i(1 + \beta).$$

Re-arrumando e utilizando as dotações de cada agente individual, temos o consumo no primeiro período para o agente 1 e 2:

$$\begin{aligned} \text{agente 1:} \qquad & c_1^1 = \frac{\hat{e}}{1+\beta}(1 + \beta\pi(s_1)) \\ \text{agente 2:} \qquad & c_1^2 = \frac{\hat{e}}{1+\beta}(\beta\pi(s_2)) \end{aligned}$$

Utilizando a definição de $\theta \equiv c_1^1/(c_1^1 + c_1^2) = c_1^1/\hat{e}$:

$$\theta = \frac{1 + \beta\pi(s_1)}{1+\beta},$$

onde claramente quando $\pi(s_1) \to 1$, $\theta \to 1$. Intuitivamente, quando $\pi(s_1)$ tende a 1, a renda do agente 1 (considerando todos os estados da natureza) aumenta relativamente ao agente 2, porque a probabilidade de estar no estado em que ele recebe a dotação é maior. Isso se reflete em uma maior fração do consumo. Note que θ é constante em todos os períodos.

2. **(Operador em $C(X)$ - 10 pontos).** Considere o seguinte operador T definido em $C(X)$, o espaço de funções contínuas e limitadas com a norma do supremo e domínio nos números não negativos, $X \in \mathbb{R}_0^+$:

$$(TV)(x) = \max_{y \in [0, \min\{x,1\}]} \left\{ \sqrt{y} + \beta V(x-y) \right\}.$$

Mostre que T é um mapa de funções contínuas e limitadas para funções contínuas e limitadas.

Dica: primeiro mostre que o operador faz um mapa de funções limitadas para funções limitadas, e depois mostre que faz um mapa de funções contínuas para funções contínuas.

Solução: Limitada: Note que $y \in [0,1]$, e portanto $\sqrt{y} \in [0,1]$ é limitada. Se V for limitada, $\sqrt{y} + \beta V(x-y)$ também será limitada e portanto TV é limitada. Contínua: Utilize o Teorema do máximo de Bergé. Se V for contínua, a função $h(x,y) \equiv \sqrt{y} + \beta V(x-y)$ é contínua. A correspondência $\Gamma(x) \equiv [0, \min\{x,1\}]$ tem valor compacto (é fechado e limitado) e é contínuo (já que a função $\min\{x,1\}$ é contínua). Logo TV é contínua.

3. **(Procurando Apartamento na Asa Norte - 25 pontos).** Considere um agente que está atualmente alugando um apartamento com aluguel $r_0 \in (0, \overline{r})$. No início de cada mês, t, o agente recebe uma oferta para alugar um novo apartamento. Os apartamentos diferem apenas em seu aluguel, r, que é uma variável aleatória independente e identicamente distribuída com distribuição $f(r)$ e suporte entre $[0, \overline{r}]$. Uma vez que o agente aceita uma oferta, ele se muda para o novo apartamento (no mesmo período da oferta) e fica no novo apartamento para sempre. O agente minimiza o fluxo esperado descontado de pagamentos de aluguel, ou seja, ele maximiza

$$U = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (-r_t) \right],$$

onde $\beta \in (0, 1)$ e r_t é o aluguel pago em t.

(a) (6 Pontos) Escreva a função valor, V_A, que representa o valor quando o agente aceita uma oferta de apartamento com aluguel r.

Solução:

$$V_A(r) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (-r) = -\frac{r}{1-\beta}$$

(b) (7 Pontos) Escreva a função valor de rejeitar uma oferta de apartamento com aluguel r, V_R. Escreva a equação de Bellman (V) do agente que tem em mãos uma oferta r (antes de decidir se aceita ou rejeita a oferta).

Solução: A função valor de rejeitar a oferta é igual à soma

$$V_R = -r_0 + \beta \mathbb{E}[V(r')] = -r_0 + \beta \int_0^{\overline{r}} V(r') f(r') dr'.$$

Onde a equação de Bellman é

$$V(r) = \max\{V_A(r), V_R\}.$$

(c) (6 Pontos) Caracterize a regra de decisão do agente. Mostre que existe um aluguel de indiferença, r^*, em que o agente é indiferente em realizar a mudança. Mostre que a equação que determina r^* é dada por:

$$r_0 - r^* = \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^{r^*} (r^* - r') f(r') dr'$$

Solução: O argumento é semelhante ao modelo de McCall, mas temos que ter cuidado pois agora o valor de aceitar é *decrescente* em r (ou crescente em $-r$). Sendo o valor de aceitar, $V_A(r)$, decrescente em r e o valor de rejeitar, V_R, uma constante, existirá um r^* tal que $V_A(r^*) = V_R$ (dado que $r_0 \in (0, \overline{r})$). Podemos encontrá-lo utilizando a condição de indiferença:

$$
\begin{aligned}
-\frac{r^*}{1-\beta} &= -r_0 + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{V_A(r'), V_R\} f(r')dr' \\
-\frac{r^*}{1-\beta} &= -r_0 + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{-\frac{r'}{1-\beta}, -\frac{r^*}{1-\beta}\} f(r')dr' \\
-\frac{r^*}{1-\beta} &= -r_0 - \frac{\beta r^*}{1-\beta} + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{\frac{r^* - r'}{1-\beta}, 0\} f(r')dr' \\
r_0 - r^* &= \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^{\overline{r}} \max\{r^* - r', 0\} f(r')dr' \\
r_0 - r^* &= \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^{r^*} (r^* - r') f(r')dr'
\end{aligned}
$$

(d) (6 pontos) Agora suponha que, uma vez que o agente aceite uma oferta, ele não precisa ficar para sempre no apartamento. Ou seja, a cada período o agente recebe uma nova oferta de apartamento com taxa de aluguel r e decide se muda ou não para o novo apartamento (o agente pode mudar mais de uma vez ao longo de sua vida infinita).

Escreva a equação de Bellman descrevendo o problema de decisão do indivíduo (*Dica:* a equação de Bellman só tem uma variável de estado).

Solução: Você precisa carregar o aluguel atual como um estado. Considerando o aluguel do período t como r (logo após a decisão de aceitar ou rejeitar), note que o valor do aceite e rejeite são iguais:

$$
\begin{aligned}
V_R(r) &= -r + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{V_A(r'), V_R(r)\} f(r')dr' \\
V_A(r) &= -r + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{V_A(r'), V_R(r)\} f(r')dr'.
\end{aligned}
$$

Logo a equação de Bellman é:

$$
V(r) = -r + \beta \int_0^{\overline{r}} \max\{V(r'), V(r)\} f(r')dr'.
$$