Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Final 2023.1

Instruções:

- Coloque o seu nome na primeira página da prova.
- A prova consiste em 3 perguntas totalizando 50 pontos.
- A duração total da prova é de 2 horas.
- Consulta a qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas.
- Mantenha a prova organizada e as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Loglinearizando Condição de Equilíbrio - 7 pontos).** Considere a seguinte condição de equilíbrio no mercado de bens de um modelo de crescimento neoclássico:

$$K_{t+1} = K_t^\alpha + (1-\delta)K_t - C_t \equiv g(K_t, C_t).$$

Defina a variável em desvios % do estado estacionário como $\tilde{x}_t = \log X_t - \log \bar{X}$, onde $\bar{X}$ é o estado estacionário de X_t. Loglinearize a equação acima, ou seja, derive a condição de equilíbrio em desvios % do estado estacionário.

Solução:

$$\tilde{k}_{t+1} = (\alpha \bar{K}^{\alpha-1} - (1-\delta))\tilde{k}_t - \frac{\bar{C}}{\bar{K}}\tilde{c}_t.$$

2. **(ChatGPT no Crescimento Neoclássico - 19 pontos).** Considere o modelo de crescimento neoclássico em tempo contínuo.

   A firma representativa produz um único bem final utilizando capital e trabalho que pode ser consumido ou investido. A função de produção é dado por $Y_t = Z_t K_t^{\alpha}(A_t L_t)^{1-\alpha}$. A população cresce a taxa n e a tecnologia viesada ao trabalho, A_t, cresce a taxa g:

$$\frac{\dot{A}_t}{A_t} = g \qquad \& \qquad \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n.$$

   Z_t não segue uma tendência de crescimento, mas inovações drásticas (como o chatGPT) podem alterar o seu valor entre um período e outro. Suponha: $L_0 = 1, A_0 = 1, Z_0 = 1, K_0 > 0$ e defina as variáveis por unidade eficiente do trabalho como: $x = \frac{X}{AL}$.

   A utilidade da família representativa é:

$$\max_{c_t \geq 0} \int_0^{\infty} e^{-(\rho-n-g(1-\sigma))t} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt,$$

   onde $\rho > n + g(1-\sigma)$. A restrição de recursos em unidades eficientes de trabalho é dado por

$$\dot{k}_t = Z_t k_t^{\alpha} - c_t - (n + \delta + g)k_t \qquad \forall t.$$

   Suponha que a condição de transversalidade é satisfeita.

   (a) (7 pontos) Encontre um sistema de equações diferenciais que caracterize a solução do planejador para esta economia.

   Solução: Hamiltoniano (descontado):

$$\hat{H}(k_t, c_t, \mu_t) = u(c_t) + \mu_t(Z_t k_t^{\alpha} - c_t - (n + g + \delta)k_t)$$

   Condições necessárias (junto com a TVC e a lei de movimento) em todo t:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \mu_t \\ \mu_t[\alpha Z_t k_t^{\alpha-1} - n - g - \delta] &= -\dot{\mu}_t + (\rho - n - g(1-\sigma))\mu_t \end{aligned}$$

   Equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(\alpha Z_t k_t^{\alpha-1} - \delta - \rho - g\sigma) \qquad \forall t.$$

   Utilizando a forma funcional da utilidade, encontramos a EE:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha Z_t k_t^{\alpha-1} - \delta - \rho - g\sigma}{\sigma} \qquad \forall t.$$

   Para completar o sistema de equações diferenciais temos a restrição de recursos por unidade eficiente de trabalho (além da TVC e do k_0 dado):

$$\dot{k}_t = Z_t k_t^{\alpha} - c_t - (n + g + \delta)k_t \qquad \forall t.$$

(b) (6 pontos) Suponha que Z_t no estado estacionário seja dado por Z. Derive as equações que caracterizam o estado estacionário e desenhe o diagrama de fases.

Solução: O estado estacionário pode ser encontrado solucionando o sistema:

$$\alpha Z k_{ss}^{\alpha-1} = \delta + \sigma g + \rho \qquad \Leftrightarrow k_{ss} = \left(\frac{\alpha Z}{\rho + \sigma g + \delta}\right)^{1/(1-\alpha)}$$
$$c_{ss} = Z k_{ss}^{\alpha} - (n+g+\delta)k_{ss} \Leftrightarrow c_{ss} = \left(\frac{\alpha Z}{\rho + \delta + \sigma g}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\delta + \rho + \sigma g - \alpha(n+g+\delta)}{\alpha}\right)$$

O diagrama de fases é o mesmo visto em sala de aula.

(c) (6 pontos) Suponha que a economia esteja no estado estacionário. No período t_0 uma nova tecnologia de inteligência artifical é densenvolvida. Esta inovação faz com que a economia se torne mais produtiva no curto prazo, mas retorne ao nível original no longo prazo.[1]

Pelo ponto de vista do planejador, no instante t_0 ocorre uma mudança de Z para $\hat{Z}$, onde $\hat{Z} > Z$, mas em t_1, $\hat{Z}$ se desloca de volta para Z. Descreva a dinâmica de transição até o estado estacionário em t_{ss} (utilize o diagrama de fases e outros gráficos se necessário).

Solução: Note que o estado estacionário inicial e final são os mesmos, já que a mudança é temporária.

No diagrama de fases, ambas as curvas se deslocam em t_0, mas retornam ao seu estado original em t_1. A curva em forma de u invertido se desloca cima e a reta que determina o capital no estado estacionário se desloca para a direita.

- Em t_0, o consumo salta para cima, mas abaixo da curva $\dot{k}$ que se deslocou momentaneamente para cima.
- Como o consumo está abaixo da curva de $\dot{k}$, a economia acumula capital entre t_0 e t_1. Por outro lado, a reta $\dot{c}$ se deslocou para a direita, e logo o consumo aumenta entre t_0 e t_1. Em algum momento entre t_0 e t_1, o consumo cruza a reta $\dot{c}$ e o consumo começa a se reduzir.
- Em t_1, ambas as curva retornam ao ponto original. Neste momento, o consumo e o capital estarão acima do estado estacionário e exatamente na trajetória de sela para o antigo estado estacionário.
- Em t_1 até t_{ss}, tanto o consumo quanto o capital diminuirão e eventualmente atingirão o estado estacionário.

[1] Imagine que a inteligência artificial reduza a inteligência das novas gerações e por isso a produtividade total dos fatores retorne ao estado original.

3. **(OLG com Oferta de Trabalho Elástica - 24 pontos).** Considere o modelo OLG onde o agente decide o quanto trabalhar quando jovem e consome a poupança quando velho. Não há crescimento populacional e todas as gerações tem massa unitária. A utilidade de um agente nascido em t é:

$$\ln(c_t^1) - \theta \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} + \beta \ln(c_{t+1}^2).$$

O governo tributa os retornos do capital em τ_t^k. Suponha $\delta = 0$. As restrições orçamentárias do agente quando jovem e velho para todas as gerações $t \geq 1$ são:

$$\begin{aligned} c_t^1 + s_t &\leq w_t n_t \\ c_{t+1}^2 &\leq (1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k))s_t \end{aligned}$$

O governo utiliza a tributação para financiar a sua política fiscal. Suponha que o orçamento é balanceado em todos os períodos, ou seja, a restrição orçamentária do governo para todo $t \geq 1$ é:

$$\tau_t^k s_t r_t = G_t,$$

onde $G_t > 0$ é o gasto agregado (e exógeno). A geração de velhos iniciais tem $K_0 > 0$ dado.

(a) (6 pontos) Resolva o problema das famílias. Encontre uma equação que mostra o trade-off entre consumo e poupança (EE) e outra equação que determina a oferta de trabalho (LS). Qual equação é intertemporal e qual é intratemporal?

Solução: Substituindo s_t para encontrar a restrição orçamentária intertemporal e escrevendo o Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \ln c_t^1 - \theta \frac{n_t^{1+\phi}}{1+\phi} + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t \left(w_t n_t - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k)} \right) \tag{1}$$

C.P.Os

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c_t^1} = \lambda_t \qquad \forall t, \\ &\frac{\beta}{c_{t+1}^2} = \frac{\lambda_t}{(1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k))} \qquad \forall t, \\ &\theta n_t^\phi = w_t \lambda_t \qquad \forall t. \end{aligned}$$

O que implica na Equação de Euler (intertemporal) e na equação de oferta de trabalho (intratemporal).

$$\begin{aligned} (EE) \qquad & c_{t+1}^2 = c_t^1 [\beta(1 + r_{t+1}(1 - \tau_{t+1}^k))] \qquad \forall t, \\ (LS) \qquad & \theta n_t^\phi = \frac{w_t}{c_t^1} \qquad \forall t \end{aligned}$$

(b) (5 pontos) Mostre que a oferta de trabalho ótima não depende do salário, w_t, e é dada por:

$$n^* = \left(\frac{1+\beta}{\theta}\right)^{\frac{1}{1+\phi}}.$$

Dica: utilize a equação de Euler, a equação de oferta de trabalho e a restrição orçamentária intertemporal.

Solução: Começando pela restrição orçamentária intertemporal e substituindo c_{t+1}^2 com a equação de Euler e c_t^1 com a equação de oferta de trabalho:

$$\begin{aligned}
&c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{1 + r_{t+1}(1-\tau_{t+1}^k)} = w_t n_t \\
&c_t^1 + \beta c_t^1 = c_t^1(1+\beta) = w_t n_t \\
&\frac{w_t(1+\beta)}{\theta n_t^\phi} = w_t n_t \\
&\frac{(1+\beta)}{\theta} = n_t^{1+\phi} \\
&n^* = \left(\frac{1+\beta}{\theta}\right)^{\frac{1}{1+\phi}}.
\end{aligned}$$

(c) (2 pontos) Por que a oferta de trabalho ótima é constante e não depende do salário? Explique em poucas palavras sem usar equações (*dica*: pense nos mecanismos de amplificação de um modelo de Ciclos Reais que não estão presentes no modelo OLG descrito acima).

Solução: A oferta de trabalho é constante pelo fato do agente viver apenas dois períodos e só trabalhar quando jovem. Diferentemente do modelo RBC, não há substituição intertemporal do trabalho, já que o agente velho vive apenas da sua poupança.

(d) (6 pontos) Encontre a poupança ótima, s_t, em função dos preços, dos parâmetros e de n^*. Explique intuitivamente (e em poucas palavras) porque ela NÃO depende do imposto sobre o retorno do capital (*dica*: substitua c_t^1 na restrição orçamentária do jovem).

Solução: Começando pela restrição orçamentária quando jovem e utilizando $c_t^1 = w_t n_t/(1+\beta)$ (veja a solução acima):

$$\begin{aligned}
s_t &= w_t n_t - c_t^1 \\
s_t &= w_t n_t - \frac{w_t n_t}{1+\beta} \\
s_t &= \frac{w_t n^* \beta}{1+\beta}.
\end{aligned}$$

A única diferença para um OLG canônico é que temos n^*. A poupança não depende do imposto sobre o capital porque utilizamos utilidade log: o efeito renda e o substituição da renda do capital se cancelam (ver questão da lista).

(e) (5 pontos) Considere a função de produção da firma representativa como $y_t = f(k_t, n^*)$. Escreva as condições de equilíbrio no mercado de bens e no mercado de ativos.

Solução: As condições de equilíbrio no mercado de bens e ativos são, para todo $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
&y_t = f(k_t, n^*) = c_t^1 + c_t^2 + k_{t+1} - k_t + G_t, \\
&k_{t+1} = s_t.
\end{aligned}$$

Não se esqueça do governo e que não há crescimento populacional nem depreciação.