Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Parcial 2022.1

Instruções:

- Coloque o seu nome na primeira página da prova.
- A prova consiste em 4 perguntas totalizando 80 pontos.
- A duração total da prova é de 3 horas.
- Consulta qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas.
- Não coloque perguntas diferentes na mesma página e mantenha as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Economia de Dotação em Tempo Finito - 20 pontos).** Considere uma economia de trocas onde dois agentes vivem por T períodos. A função utilidade para um agente $i = 1, 2$ é dada por:

$$U(\{c_t^i\}_{t=0}^T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln(c_t^i).$$

Em cada período os agentes recebem dotações $e_t^i \geq 0$, onde a dotação agregada da economia é $e_t^1 + e_t^2 = \hat{e}_t$. A sequência de dotações é determinística e os agentes sabem exatamente o quanto irão receber em cada período ao nascer.

Suponha uma estrutura de mercados sequenciais: os agentes podem efetuar empréstimos (ou tomar empréstimos) de um período a uma taxa de juros r_t (normalize o preço do bem de consumo para 1 em todos os períodos). Defina a_t^i, como a quantidade líquida de empréstimos do agente i em um período t. Os agentes nascem com 0 ativos e não podem morrer endividado, ou seja, $a_0^i = 0$ e $a_{T+1}^i \geq 0$ para $i = 1, 2$.

(a) (7 pontos) Descreva o problema de um agente arbitrário i. Encontre a equação de Euler associada ao problema.

Solução: O problema de um agente i é:

$$\max_{\{c_t^i>0, a_{t+1}^i\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln(c_t^i) \tag{1}$$

$$s.t. \quad c_t^i + a_{t+1}^i \leq a_t^i(1 + r_t) + e_t^i \quad \forall t, \tag{2}$$

$$a_{T+1}^i \geq 0 \quad \text{e} \quad a_0^i = 0. \tag{3}$$

Resolvendo um Lagrange, encontramos as CPOs (para todo $t = 0, ..., T-1$ e $i = 1, 2$):

$$\lambda_t^i = \lambda_{t+1}^i(1 + r_{t+1})$$

$$\beta^t \frac{1}{c_t^i} = \lambda_t$$

e a Equação de Euler:

$$\frac{1}{c_t^i} = \frac{1}{c_{t+1}^i}\beta(1+r_{t+1}) \quad t = 0,..,T-1 \quad \text{e} \quad i = 1,2,$$

e no último período: $c_T^i = a_T^i(1+r_T) + e_T^i$.

(b) (7 pontos) Escreva as condições de equilíbrio desta economia. Encontre uma equação que determina a sequência de preços, $\{r_t\}_{t=1}^T$, em função de β e da dotação agregada (ignore r_0, já os agentes começam com $a_0^i = 0$).

Solução: Para encontrar os preços (i.e., $\{r_t\}_{t=1}^T$), necessitamos utilizar uma equação de equilíbrio para cada t. No problema sequencial, as equações de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} \text{Eq. no mercado de bens:} \quad & c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e}_t \quad t = 0,...,T \\ \text{Eq. no mercado de títulos:} \quad & a_{t+1}^1 + a_{t+1}^2 = 0 \quad t = 0,...,T. \end{aligned}$$

Pela lei de Walras se $n-1$-mercados estão em equilíbrio, o enésimo mercado também estará em equilíbrio. Logo, basta utilizar uma das equações de equilíbrio em cada t com as condições de otimalidade dos agentes (i.e., a Equação de Euler). Por exemplo, podemos encontrar os preços com o sistema:

$$\begin{aligned} \text{Eq. no mercado de bens:} \quad & c_t^1 + c_t^2 = e_t^1 + e_t^2 = \hat{e}_t \quad t = 0,...,T-1 \\ \text{EE agente 1} \quad & \frac{1}{c_t^1} = \frac{1}{c_{t+1}^1}\beta(1+r_{t+1}) \quad t = 0,..,T-1 \\ \text{EE agente 2} \quad & \frac{1}{c_t^2} = \frac{1}{c_{t+1}^2}\beta(1+r_{t+1}) \quad t = 0,..,T-1 \end{aligned}$$

Para um período arbitrário t, somando as equações de euler e utilizando a condição de equilíbrio do mercado de bens:

$$\begin{aligned} &(c_{t+1}^1 + c_{t+1}^2) = (c_t^1 + c_t^2)\beta(1+r_{t+1}) \\ &\hat{e}_{t+1} = \hat{e}_t\beta(1+r_{t+1}) \\ &1 + r_{t+1} = \frac{\hat{e}_{t+1}}{\beta\hat{e}_t} \quad \text{para } t = 0,...,T-1. \end{aligned}$$

Alternativamente, podemos utilizar o eq. do mercado de títulos e as equações de euler com a restrição orçamentária de cada agente.

(c) (6 pontos) Suponha agora que as dotações $e_t^i(s^t)$ são estocásticas e dependem do histórico de estados da natureza s^t. Sob quais condições a solução do mercado sequencial é igual a da formulação Arrow-Debreu? Explique com poucas palavras (não é necessário fazer nenhuma demonstração).

Solução: Para que a estrutura de mercado Arrow-Debreu seja equivalente a de mercados sequenciais, é necessário que a restrição orçamentária intertemporal dos agentes seja equivalente. Em horizonte infinito necessitamos uma condição para impedir esquemas

Ponzi (i.e, *no-Ponzi game condition*). Em horizonte *finito* essa condição é substituída pela restrição de "não morrer endividado" $a_{T+1} \geq 0$.

Além disso, como os dotes são estocásticos, precisamos que existam *arrow-securities* disponíveis em todos os períodos e estados da natureza, ou seja, o mercado de ativos financeiros seja completo.

2. **(Equação de Bellman no problema *cake-eating* - 17 pontos).** Considere o problema *cake-eating* em horizonte infinito: um agente nasce com um bolo de tamanho inicial $x_0 > 0$, e come um pedaço do bolo, $c_t \geq 0$, em cada período. O tamanho do bolo evolui de acordo com a seguinte lei de movimento: $x_{t+1} = x_t - c_t$, onde $x_t \geq 0$ (ou seja, o tamanho do bolo nunca pode se tornar negativo). Suponha que o agente tem utilidade por período $u(c_t) = \sqrt{c_t}$ e desconta o futuro por $\beta \in (0, 1)$. Logo a equação de Bellman do problema é:

$$V(x) = \sup_{x \in [0,x']} \left\{ \sqrt{x - x'} + \beta V(x') \right\}.$$

Defina o operador T no espaço $C(X)$ de funções contínuas e limitadas com a norma do supremo que nos permite encontrar a solução da equação de Bellman:

$$(TV)(x) = \sup_{x \in [0,x']} \left\{ \sqrt{x - x'} + \beta V(x') \right\}.$$

Mostraremos que o único ponto fixo deste operador é a solução da equação de Bellman, e que esta função valor corresponde à função valor do problema de sequência subjacente.

(a) (5 Pontos) Mostre que T é um mapa de funções limitadas para funções limitadas.

Solução: Note que $c_t \geq 0$ implica que $x_t \geq x_{t+1}$. Ou seja, podemos restringir o espaço de estados a $x \in X = [0, x_0]$ já que o estado nunca sairá deste conjunto. Logo $F(x, x')$ é claramente limitado. Como estamos procurando uma função em um espaço de funções limitadas, $C(X)$, $V()$ é limitada. A soma de funções limitadas é limitada, e o resultado do supremo de uma função limitada é limitada. Logo $TV(.)$ será limitada.

(b) (5 Pontos) Mostre que T é um mapa de funções contínuas para funções contínuas.

Solução: Podemos aplicar o Teorema do Máximo de Berge ao lado direito desta equação: se $V()$ é contínua, então a função $H(x, x') = \sqrt{(x - x')} + \beta V(x')$ é contínua. Além disso, a correspondência $\Gamma = [0, x]$ é de valor compacto (o intervalo é um conjunto compacto para qualquer x) e contínua (as funções delimitadoras $\gamma_l(x) = 0$ e $\gamma_u(x) = x$ são contínuas). Então $TV(.)$ também é contínua pelo Teorema do Máximo.

(c) (7 Pontos) Mostre que existe uma solução única $V(.)$ para a equação de Bellman no espaço $C(X)$.

Solução: Já mostramos que T é um mapa de $C(X)$ para si mesmo. Temos que mostrar que T é uma contração em $C(X)$. Para fazer isso basta mostrar que operador satisfaz as condições suficientes de Blackwell (monotonicidade e desconto: exatamente como foi feito com o modelo de crescimento). Como $C(X)$ é um espaço de Banach, pelo teorema do ponto fixo de Banach o operador T tem um único ponto fixo, ou seja, existe exatamente uma única função $V \in C(X)$, tal que $V(x) = (TV)(X)$. Esta é a única solução para a equação de Bellman.

(d) (XX Pontos - NÃO COBRADA NA PROVA) Suponha o seguinte problema sequencial:

$$V^*(x_0) = \sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \sqrt{x_t - x_{t+1}}$$

$$\text{sujeito à} \quad x_{t+1} \in [0, x_t] \quad \text{para} \quad t = 0, 1, ...,$$

$$x_0 > 0 \quad \text{dado.}$$

A solução V da equação de Bellman é idêntica à função valor V^* do problema de sequencial?

Solução: Temos que aplicar o princípio da otimalidade de Bellman (Teorema: FE implica SP). Como V (o ponto fixo de T) é limitado, ele satisfaz a condição:

$$\lim_{n\to\infty} \beta^n V(x_n) = 0, \tag{4}$$

para qualquer sequência factível x_n. Além disso, a função retorno é limitada (veja a parte (a) e a correspondência do conjunto factível não é vazia, logo o teorema é válido e $V = V^*$.

3. **(Decisão de Expropriação - 19 pontos.)** O tempo é discreto e infinito. Considere uma firma com função de produção: $y_t = z_t n_t^\alpha$, onde a produtividade $z_t \in [0, \infty)$ segue um processo de Markov de primeira ordem com densidade condicional $f(z_{t+1}|z_t)$ e $\alpha \in (0,1)$. A firma escolhe o número de trabalhadores contratados, n_t, a um salário dado, $w > 0$, fixo no tempo. A firma vende o seu produto ao preço 1 (y_t é o *numeraire* da economia).

   Existe um governo que pode expropriar a fima em cada período t. Uma vez que a firma é expropriada, o governo produz com tecnologia:

$$y_t^g = \theta z_t (n_t^g)^\alpha,$$

   onde o parâmetro $\theta \in (0,1)$ captura o fato de que o governo é menos eficiente do que a firma na organização da produção. O governo se importa apenas com os fluxos de caixa descontados que uma firma expropriada gera para o seu orçamento, ou seja, o governo valoriza uma firma expropriada de acordo com:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \pi_t^g = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (y_t^g - n_t^g w),$$

   onde $\beta \in (0,1)$.

   Em cada período, o governo tem a opção de expropriar a firma, o que cria um custo C para o governo em t (devido à perda de reputação internacional, protestos políticos, etc), mas sem custos adicionais no futuro. Uma vez que a firma é expropriada, o governo tem o controle dela para sempre.

   (a) (6 Pontos) Encontre a demanda ótima por trabalho para a firma (no setor privado) n_t^* e para o governo n_t^{g*}. Em qual situação a demanda por trabalho é maior?

   Solução: A decisão é estática e podemos resolver período por período. O problema é:

$$\pi_t^g = \max_{n_t^g} \{\theta z_t (n_t^g)^\alpha - w n_t^g\}$$

   Tirando as condições de primeira ordem e resolvendo por n_t^{g*}:

$$n_t^{g*} = \left(\frac{\alpha \theta z_t}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \forall t,$$

   e o lucro ótimo é positivo e dado por (isso não foi pedido na questão):

$$\pi_t^g = (1-\alpha)\frac{(\theta z_t)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{w^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} = \pi^g(z). \tag{5}$$

   A solução para uma firma no setor privado é a mesma com $\theta = 1$. Logo $n_t^* > n_t^{g*}$ e $\pi_t > \pi_t^g$ (para o mesmo z dado).

   (b) (6 Pontos) Encontre a equação de Bellman que caracteriza o valor W de uma empresa expropriada para o governo (excluindo o custo de expropriação C).

   Solução: Note que tanto n_t^{g*} e π_t^{g*} dependem do tempo apenas via z_t, ou seja, sabendo z podemos calcular a demanda por trabalho e o lucro. Logo, a equação de Bellman da firma depende apenas de z:

$$W(z) = \max_{n^g}\{\theta z_t (n_t^g)^\alpha - w n_t^g + \beta \mathbb{E}[W(z')|z]\}$$
$$W(z) = \max_{n^g}\{\theta z_t (n_t^g)^\alpha - w n_t^g\} + \beta \mathbb{E}[W(z')|z]$$
$$W(z) = \pi^g(z) + \beta \int_0^\infty W(z') f(z'|z) dz'$$

(c) (7 pontos) Encontre a equação de Bellman que caracteriza a decisão de expropriação do governo, V. Descreva o(s) estado(s), controle(s) e função retorno. Você pode usar a função valor W encontrada na questão anterior se desejar.

Solução: Estado z. Controle: expropriação, $e = \{1, 0\}$, onde 1 representa a exproriação. Função retorno $F(z, e) = \pi^g(z) - C$ se $e = 1$ e $F(z, e) = 0$ se $e = 0$.

Equação de Bellman:

$$V(z) = \max_{e \in \{1,0\}} \{e(W(z) - C) + (1 - e)\beta \mathbb{E}[V(z')|z]\} = \max\{W(z) - C, \beta \mathbb{E}[V(z')|z]\},$$

onde $\mathbb{E}[V(z')|z] = \int_0^\infty V(z') f(z'|z) dz'$.

4. **(Turismo Sustentável na Chapada dos Veadeiros - 24 pontos.)** Suponha uma firma monopolística responsável por gerenciar um parque nacional com estado de conservação h_t. A firma decide o preço de entrada no parque nacional, $p_t > 0$, e o gasto com conservação, $u_t \geq 0$, utilizado para a manutenção e melhoramento do parque. O número de visitantes do parque nacional é representado pela função de demanda, $D(p, h) > 0$, e depende negativamente do seu preço de entrada, i.e. $D_p(p, h) < 0$, e positivamente do seu estado de conservação, $D_h(p, h) > 0$.

   O lucro da firma em um instante t é dado pela sua receita menos o seu gasto com conservação:

$$\pi(p, h, u) = pD(p, h) - u.$$

   A firma maximiza o seu lucro intertemporal, descontado por r:

$$\int_0^\infty e^{-rt}\pi(p_t, h_t, u_t)dt.$$

   O estado de conservação do parque evolui de acordo com três fatores:

   - O impacto dos visitantes no estado de conservação do parque, governado por $\gamma D(p, h)$, onde $\gamma > 0$ (quanto mais visitantes, mais rapidamente o parque se deprecia);
   - A depreciação natural do parque, governado por $\delta \geq 0$;
   - O fluxo de melhorias no parque, que é uma função do gasto de conservação: $K(u) = u^\alpha$, onde $\alpha \in (0, 1)$.

   O parque tem estado de conservação inicial dado: $h_0 > 0$.

   (a) (4 Pontos) A lei de movimento do estado de conservação do parque é dado por:

$$h_{t+\Delta t} = h_t - \gamma D(p_t, h_t)\Delta t - \delta h_t \Delta t + u_t^\alpha \Delta t.$$

   Derive a lei de movimento em sua forma diferencial (i.e., $\dot{h}_t$).

   Solução:[1] Começando pela equação acima, re-organizando e tomando o limite $\Delta t \to 0$:

$$h_{t+\Delta t} = h_t - \gamma D(p_t, h_t)\Delta t - \delta h_t \Delta_t + u_t^\alpha \Delta t \tag{6}$$
$$\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} = -\gamma D(p_t, h_t) - \delta h_t + u_t^\alpha \tag{7}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} = \dot{h}_t = -\gamma D(p_t, h_t) - \delta h_t + u_t^\alpha \tag{8}$$

   (b) (3 Pontos) Escreva o(s) estado(s) e o(s) controle(s) do problema (Dica: não reduza o número de controles).

   Solução: Estado: h. Controles: u e p.

   (c) (7 Pontos) Escreva o Hamiltoniano associado ao problema. Derive as condições necessárias de Pontryagin (incluindo condições iniciais e terminais).

   Solução: O Hamiltoniano (em valor presente) é dado por

$$H(u_t, p_t, h_t, \mu_t) = p_t D(p_t, h_t) - u_t + \mu(-\gamma D(p_t, h_t) - \delta h_t + u_t^\alpha)$$

[1] Questão baseada em Chenavaz et al (2022).

Seja D_p e D_h as derivadas parciais de D. As condições necessárias são:

$$H_h(u_t, p_t, h_t, \mu_t) = p_t D_h(p_t, h_t) + \mu_t(-\gamma D_h(p_t, h_t) - \delta) = r\mu_t - \dot{\mu}_t \tag{9}$$
$$H_u(u_t, p_t, h_t, \mu_t) = -1 + \mu_t \alpha u_t^{\alpha-1} = 0 \tag{10}$$
$$H_p(u_t, p_t, h_t, \mu_t) = p_t D_p(p_t, h_t) + D(p_t, h_t) - \mu_t \gamma D_p(p_t, h_t) = 0 \tag{11}$$
$$H_\mu(u_t, p_t, h_t, \mu_t) = -\gamma D(p_t, h_t) - \delta h_t + u_t^\alpha \tag{12}$$

e a condição inicial, h_0, e terminal $\lim_{T\to\infty} e^{-rT}\mu_T h_T = 0$ (TVC).

(d) (4 Pontos) Encontre uma equação que determina o preço ótimo da firma em função do(s) estado(s) e controle(s).

Solução: Pela CPO de u temos que:

$$\mu_t^* = \frac{u_t^{*1-\alpha}}{\alpha}, \tag{13}$$

substituindo na CPO de p:

$$p_t^* = -\frac{D(p_t^*)}{D_p(p_t^*, h_t^*)} + \gamma \frac{u_t^{*1-\alpha}}{\alpha}$$

Observação (extra, não foi pedido): Caso tivessemos asssumido uma elasticidade preço-demanda constante usual: $\varepsilon_p = -D_p(p,h)\dfrac{p}{D(p,h)}$, poderiamos ter ido além:

$$p_t^* = \frac{p_t^*}{\varepsilon_p} + \gamma \frac{u_t^{*1-\alpha}}{\alpha}$$
$$p_t^* = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p - 1}\gamma \frac{u_t^{*1-\alpha}}{\alpha},$$

que é a equação preço usual de firmas monopolísticas: preço = mark-up × custo marginal. Neste caso, o custo marginal é o gasto extra em conservação para compensar a depreciação gerada pela demanda extra (dado por $\gamma u_t^{*1-\alpha}/\alpha$).

(e) (6 Pontos) Encontre uma equação - semelhante a uma equação de Euler - que determina como o gasto com conservação evolui de acordo com o tempo em função do(s) estado(s) e controle(s).

Solução: Tomando a derivada de (13) em relação ao tempo:

$$\dot{\mu}_t^* = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\dot{u}_t^*}{u_t^{*\alpha}}. \tag{14}$$

Utilizando a condição de H_h e substituindo μ_t^* e $\dot{\mu}_t^*$:

$$p_t D_h(p_t, h_t) = \mu_t(r - \delta + \gamma D_h(p_t, h_t)) - \dot{\mu}_t$$
$$p_t^* D_h(p_t^*, h_t^*) = \frac{u_t^{*1-\alpha}}{\alpha}(r - \delta + \gamma D_h(p_t^*, h_t^*)) - \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\dot{u}_t^*}{u_t^{*\alpha}},$$

onde p_t^* é dado pela solução da questão anterior (e, portanto, é uma função de u_t e h_t), e juntamente com a lei de movimento de conservação do parque podemos determinar h_t^*.

Intuitivamente, a firma considera o trade-off entre o benefício marginal de gastar mais com conservação e o seu custo marginal. O benefício marginal é dado pelo aumento da receita, já que um parque mais conservado atrai mais visitantes. O custo marginal, é o custo marginal de melhorias (em função dos gastos), mais o crescimento no custo de conservação, já que o aumento de visitantes acelera a depreciação do parque.