Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Final 2022.1

Instruções:

- Coloque o seu nome na primeira página da prova.
- A prova consiste em 3 perguntas totalizando 60 pontos.
- A duração total da prova é de 2 horas e 30 minutos.
- Consulta qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas.
- Mantenha as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Ramsey contrai COVID - 23 pontos).** Considere o modelo Ramsey-Cass-Koopmans com crescimento populacional dado por $\dot{L}_t/L_t = n$ (mas sem crescimento tecnológico), onde $L_0 = 1$. A utilidade da família representativa é:

$$\max_{c_t \geq 0} \int_0^\infty e^{-(\rho-n)t} \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt, \tag{1}$$

onde $c_t \equiv C_t/L_t$ é o consumo per capita. A restrição de recursos agregada da economia é, em todo t, dado por:

$$\begin{aligned} Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} &= C_t + I_t + G_t \\ \dot{K}_t &= I_t - \delta K_t \end{aligned}$$

Onde o gasto do governo é exógeno e financiado por um imposto lump-sum: $T_t = G_t$. Suponha que $\rho > n$ e que a condição de transversalidade é satisfeita.

(a) (3 pontos) Utilize a restrição de recursos (agregada) e encontre uma restrição de recursos per capita:

$$\dot{k}_t = k_t^\alpha - c_t - (n+\delta)k_t - g_t \qquad \forall t$$

onde $k_t \equiv K_t/L_t$, e $g_t \equiv G_t/L_t$.

Solução:

$$\begin{aligned} \dot{K}_t &= K_t^\alpha L_t^{1-\alpha} - \delta K_t - C_t - G_t \\ \frac{\dot{K}_t}{L_t} &= \frac{K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}}{L_t} - \delta \frac{K_t}{L_t} - \frac{C_t}{L_t} - \frac{G_t}{L_t} \\ \frac{\dot{K}_t}{L_t} &= k_t^\alpha - \delta k_t - c_t - g_t, \end{aligned}$$

e utilizando

$$\frac{\dot{k}_t}{k_t} = \frac{\dot{K}_t}{K_t} - n \qquad \& \qquad K_t = k_t L_t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\dot{K}_t}{L_t} = \dot{k}_t + k_t n,$$

encontramos a equação pedida.

(b) (5 pontos) Encontre um sistema de equações diferenciais que caracteriza a solução do planejador para esta economia.

Solução: Hamiltoniano (descontado):

$$\hat{H}(k_t, c_t, \mu_t) = u(c_t) + \mu_t(k_t^\alpha - c_t - (n+\delta)k_t - g_t)$$

Condições necessárias (junto com a TVC e a lei de movimento) em todo t:

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \mu_t \\ \mu_t[\alpha k_t^{\alpha-1} - n - \delta] &= -\dot{\mu}_t + (\rho - n)\mu_t \end{aligned}$$

Equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -(\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \rho) \qquad \forall t.$$

Utilizando a forma funcional da utilidade, encontramoss a EE:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\sigma} \qquad \forall t.$$

Para completar o sistema de equações diferenciais temos a restrição de recursos per capita (além da TVC e do k_0 dado):

$$\dot{k}_t = k_t^{\alpha} - c_t - (n+\delta)k_t - g_t \qquad \forall t.$$

(c) (5 pontos) Suponha que $g_t = g$ é constante. Derive as equações que caracterizam o estado estacionário e desenhe o diagrama de fases.

Solução: O estado estacionário pode ser encontrado solucionando o sistema:

$$\begin{aligned} \alpha k_{ss}^{\alpha-1} = \delta + \rho \qquad & \Leftrightarrow k_{ss} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \\ c_{ss} = k_{ss}^{\alpha} - (n+\delta)k_{ss} - g & \Leftrightarrow c_{ss} = \left(\frac{\alpha}{\rho+\delta}\right)^{1/(1-\alpha)} \left(\frac{\delta+\rho-\alpha(n+\delta)}{\alpha}\right) - g \end{aligned}$$

O diagrama de fases é o mesmo visto em sala de aula.

(d) (5 pontos) Suponha que a economia está no estado estacionário. No período t_0 ocorre uma pandemia e o governo precisa aumentar os seus gastos *temporariamente*. Isto é, durante $t_0 \leq t \leq t_1$, o governo aumenta seus gastos $g_t = g' > g$, e após t_1 retorna a g. Descreva a dinâmica de transição até o estado estacionário em t_{ss} (utilize o diagrama de fases e outros gráficos se necessário).

Solução: No diagrama de fases, a curva em forma de u invertido se desloca para baixo em t_0, e em t_1 retorna ao ponto original.

- Em t_0, o consumo salta para baixo, mas acima da curva $\dot{k}$ que se deslocou momentaneamente para baixo.
- Como o consumo esta acima da curva de $\dot{k}$, a família está despoupando e o capital se reduz entre t_0 e t_1.
- Em t_1, a curva $\dot{k}$ retorna ao ponto original. Neste momento, o consumo e o capital estarão abaixo do estado estacionário e exatamente na trajetória de sela para o estado estacionário.
- Em t_1 até t_{ss}, tanto o consumo quanto o capital aumentarão e eventualmente atingirão o estado estacionário.

(e) (5 pontos) Suponha que a economia está no estado estacionário. No período t_0 ocorre uma pandemia que reduz a população do país em uma fração $\Delta \in (0,1)$. Descreva a dinâmica de transição até o estado estacionário em t_{ss} (utilize o diagrama de fases e outros gráficos se necessário).

Solução: Note que o estado estacionário NÃO SE ALTERA, mas a economia se move para fora do estado estacionário porque as variáveis per-capita mudam ($k = K/L$ e $c = C/L$).

Em particular, k_t aumenta porque o estoque de capital K_t é fixo mas a população L_t diminui.

Dado que a k_t aumenta, pela equação de euler, a taxa de crescimento de consumo agora é negativa:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{\alpha k_t^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\sigma} < 0,$$

ou seja, a economia está poupando menos e o consumo está diminuindo com o tempo. Note que c_t aumenta no t_0, tanto pela queda de L_t, quanto pela diminuição da poupança dos consumidores que restaram: $c_0 > c_{ss}$ e $k_0 > k_{ss}$. A economia irá saltar para a trajetória de sela original no quadrante nordeste.

- Em t_0, tanto capital quanto consumo saltam para cima. Este salto é em direção nordeste no diagrama de fase, e cai exatamentet na trajetória de sela.
- Entre t_0 e $t_s s$, capital e consumo diminuem, e a economia retorna ao estado estacionário original.

2. **(OLG com Governo - 18 pontos).** Considere o modelo OLG padrão onde o agente trabalha quando jovem e consome a poupança quando velho. A utilidade de um agente nascido em t é:

$$\ln(c_t^1) + \beta \ln(c_{t+1}^2).$$

O governo tributa os jovens via taxação *lump-sum*, τ_t. Suponha $\delta = 0$. As restrições orçamentárias do agente quando jovem e velho para todas as gerações $t \geq 1$ é:

$$\begin{aligned} c_t^1 + s_t &\leq w_t - \tau_t \\ c_{t+1}^2 &\leq (1 + r_{t+1})s_t \end{aligned}$$

O governo utiliza a tributação para financiar a sua política fiscal. Suponha que o orçamento é balanceado todo os períodos, ou seja, a restrição orçamentária do governo para todo $t \geq 1$ é:

$$\tau_t L_t = G_t \equiv g_t L_t,$$

onde $G_t > 0$ é o gasto agregado (e é exógeno), e g_t o gasto por unidade efetiva de trabalho. A função de produção é: $Y_t = K_t^\alpha L_t^{1-\alpha}$, com $\alpha \in (0, 1)$ e a população cresce $L_t = (1 + n)^t L_0$ onde $L_0 = 1$. A geração de velhos iniciais tem $K_0 > 0$ dado.

(a) (5 pontos) Resolva o problema das famílias. Encontre s_t em função dos parâmetros, dos preços, e do imposto τ_t.

Solução: Substituindo s_t para encontrar a restrição orçamentária intertemporal e escrevendo o Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \ln c_t^1 + \beta \ln c_{t+1}^2 + \lambda_t \left(w_t - \tau_t - c_t^1 - \frac{c_{t+1}^2}{1 + r_{t+1}} \right) \tag{2}$$

O que implica na Equação de Euler:

$$c_{t+1}^2 = c_t^1 [\beta(1 + r_{t+1})] \qquad \forall t.$$

Utilizando a restrição orçamentária e substituindo na equação de Euler:

$$s_t = \frac{\beta(w_t - \tau_t)}{1 + \beta} \qquad \forall t,$$

e encontramos s_t em função dos parâmetros, preços e imposto.

(b) (3 pontos) Escreva as condições de equilíbrio no mercado de bens e no mercado de ativos.

Solução: As condições de equilíbrio no mercado de bens e ativos são, para todo $t \geq 1$ (não se esqueça do governo):

$$\begin{aligned} c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{1 + n} + k_{t+1}(1 + n) - k_t + g_t &= k_t^\alpha \\ k_{t+1} &= \frac{s_t}{1 + n} \end{aligned}$$

(c) (5 pontos) Suponha que os preços são dados por $r_t = \alpha k_t^{\alpha-1}$ e $w_t = (1-\alpha)k_t^{\alpha}$ para todo t, onde $k_t \equiv K_t/L_t$. Encontre uma equação que descreve a evolução do capital de equilíbrio no modelo (k_{t+1} em função de k_t e parâmetros). Como um aumento dos gastos do governo por trabalhador altera a dinâmica de acumulação do capital?

Solução: Utiliando a condição de equilíbrio no mercado de ativos, equação de a equação da poupança e substituindo $g_t = \tau_t$:

$$k_{t+1} = \frac{\beta[(1-\alpha)k_t^{\alpha} - g_t]}{(1+n)(1+\beta)}.$$

Ou seja, um aumento dos gastos g_t reduzem k_{t+1} para um dado k_t.

(d) (5 pontos) Suponha $n = 0$ (para simplificar). No modelo de crescimento neoclássico em tempo discreto com dinastias vivendo infinitos períodos e política fiscal financiada por taxação *lump-sum*, a equação de Euler é dada por:

$$c_{t+1} = c_t[\beta(1 + r_{t+1})] \qquad \forall t.$$

Encontre o k_t no estado estacionário no modelo de crescimento neoclássico. Como o nível dos gastos do governo por unidade efetiva de trabalho, g, afeta o capital no estado estacionário no modelo de crescimento neoclássico? Compare com o modelo OLG.

Solução: No modelo de crescimento neoclássico, o capital no estado estacionário é encontrado pela equação de Euler (e substituindo r pela produtividade marginal do capital):

$$\begin{aligned}
1 &= \beta(1 + \alpha k_{ss}^{\alpha-1}) \\
\frac{1}{\beta} - 1 &= \frac{\alpha}{k_{ss}^{1-\alpha}} \\
k_{ss}^{RCK} &= \left(\frac{\alpha\beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}
\end{aligned}$$

Claramente o capital por trabalhador no estado estacionário do modelo de crescimento neoclássico não é afetada pelo nível da política fiscal.

Em oposição, no modelo OLG, o capital no estado estacionário diminui com um aumento de g. A equação que determina o capital no estado estacionário é dado pela lei de movimento encontrada na questão anterior (agora com $n = 0$):

$$k_{ss}^{OLG} = \frac{\beta[(1-\alpha)(k_{ss}^{OLG})^{\alpha} - g]}{(1+\beta)}$$

3. **(RBC com utilidade GHH - 19 pontos).** Considere o modelo RBC padrão. A função de produção da firma representativa é: $Y_t = Z_t K_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$, onde $\alpha \in (0,1)$. O choque segue um processo estocástico AR(1): $\ln Z_t = \rho_z \ln Z_{t-1} + \sigma_z \varepsilon_t$ onde ε_t tem média 0 e desvio padrão 1. Não há crescimento populacional, nem governo.

   Na economia, existe uma família representativa com massa unitária que deriva utilidade do consumo e desutilidade do trabalho. A utilidade da família tem a forma de *Greenwood, Hercowitz, and Hoffman* (GHH):

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{1}{1-\sigma} \left(C_t - \theta \frac{N_t^{1+\psi}}{1+\psi} \right)^{1-\sigma}.$$

   A restrição orçamentária das famílas é

$$C_t + K_{t+1} = W_t N_t + (1 + r_t - \delta) K_t \qquad \forall t.$$

   Finalmente $K_0 > 0$ e Z_0 é dado. Assuma que a condição de Transversalidade é satisfeita.

   (a) (5 pontos) Descreva e resolva o problema da família representativa em um ambiente competitivo. Derive a equação de Euler e a equação que determina a oferta de trabalho. Qual condição é intertemporal e qual condição é intratemporal?

   Solução: A única diferença é que a derivada cruzada entre trabalho e lazer não é zero, ou seja, a utilidade não é separável. O problema é padrão:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \left[\beta^t \frac{1}{1-\sigma} \left(C_t - \theta \frac{N_t^{1+\psi}}{1+\psi} \right)^{1-\sigma} + \lambda_t (W_t N_t + (1 + r_t - \delta) K_t - C_t - K_{t+1}) \right]$$

   Resolvendo as c.p.o encontramos a EE e a equação da oferta de trabalho:

$$(EE) \qquad \left(C_t - \theta \frac{N_t^{1+\psi}}{1+\psi} \right)^{-\sigma} = \mathbb{E}_t \left[\beta (1 + r_{t+1} - \delta) \left(C_{t+1} - \theta \frac{N_{t+1}^{1+\psi}}{1+\psi} \right)^{-\sigma} \right] \qquad \forall t$$

$$(LS) \qquad \theta N_t^{\psi} = W_t \qquad \forall t$$

   A Equação de Euler é a condição intertemporal, e a equação da oferta de trabalho (LS) é a condição intratemporal. Note que a utilidade GHH elimina o efeito renda da equação LS.

   (b) (4 pontos) Derive a elasticidade de Frisch (*Frisch Elasticity*) da família representativa.

   Solução: Re-organizando a equação da oferta de trabalho:

$$\ln \theta + \psi \ln N_t = \ln W_t,$$

   temos que a elasticidade de Frisch é:

$$\frac{d \ln N_t^K}{d \ln W_t} = \frac{1}{\psi}$$

(c) (5 pontos) A lei de movimento do capital agregado do modelo é padrão:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t.$$

Defina a variável em desvios % do estado estacionário como $\tilde{x}_t = \log X_t - \log \bar{X}$, onde $\bar{X}$ é o estado estacionário de X_t. Loglinearize a equação acima, ou seja, derive a lei de movimento do capital agregado em desvios % do estado estacionário.

Solução:

$$\tilde{k}_{t+1} = (1-\delta)\tilde{k}_t + \frac{\bar{I}}{\bar{K}}\tilde{i}_t.$$

(d) (5 pontos) Suponha que a economia está no estado estacionário e recebe um choque que aumenta o TFP, Z_t, em 1%. Como N_t responde? Encontre $d\ln N_t/d\ln Z_t$ (*Dica:* utilize a equação da oferta de trabalho e do produto marginal do trabalho).

Solução: Utilizando: $W_t = MPN_t = (1-\alpha)Z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$ e substituindo na equação da oferta de trabalho:

$$\begin{aligned}
\theta N_t^{\psi} &= W_t \\
\theta N_t^{\psi} &= (1-\alpha)Z_t K_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} \\
N_t &= \left[\frac{(1-\alpha)}{\theta} Z_t K_t^{\alpha}\right]^{\frac{1}{\psi+\alpha}}
\end{aligned}$$

Como capital é pre-determinado, não responde contemporaneamente a um choque em Z_t. Logo, o aumento % de N_t em resposta a um aumento % de Z_t é determinado por:

$$\frac{d\ln N_t}{d\ln Z_t} = \frac{1}{\psi+\alpha}$$