Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Parcial 2021.1
08 de Setembro

Instruções

- A duração total da prova é de 140 minutos, incluindo o tempo destinado para a entrega.
- A prova consiste em 3 perguntas totalizando 60 pontos.
- Coloque o seu nome, assinatura e número de matrícula na primeira página da prova.
- Consulta à qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas durante a prova.
- Mantenha a prova organizada: não coloque perguntas diferentes na mesma página e mantenha as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Crescimento Neoclássico sem Trabalho - 22 pontos).** Considere o modelo de crescimento neoclássico. Existe uma família representativa com massa unitária. Não há crescimento populacional. A função utilidade é dada por:

$$U(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t).$$

O bem final que pode ser consumido ou investido é produzido utilizando *apenas capital* segundo a seguinte função de produção: $y_t = k_t^{\alpha}$, onde $\alpha \in (0, 1)$. A família é dona do capital e oferta o capital à firma representativa a uma taxa r_t, onde r_t é a taxa de aluguel do capital em termos do bem de consumo no período t.

Capital inicial k_0 é dado e a acumulação de capital segue a lei de movimento:

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + i_t.$$

(a) (6 Pontos) Descreva e resolva o problema da firma representativa em uma estrutura de mercado Arrow-Debreu. O Teorema de Euler é satisfeito? Justifique brevemente.

Solução: Em Arrow-Debreu, o problema da firma maximiza o lucro total π no período zero:

$$\pi = \max_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} p_t(k_t^{\alpha} - r_t k_t).$$

Note que a firma não escolhe capital. O problema da firma é estático e as condições de primeira ordem implicam:

$$r_t = \alpha k_t^{\alpha-1} \qquad \forall t$$

A inversa implica na seguinte função de demanda por capital:

$$k_t^d = \left(\frac{\alpha}{r_t}\right)^{1/(1-\alpha)} \qquad \forall t.$$

Como a função de produção apresenta retornos decrescentes a escala, o lucro da firma é positivo (não é necessário derivar o lucro). O teorema de Euler sigue sendo válido pois a função de produção é homogênea de grau α: $\alpha k^{\alpha} = \alpha k^{\alpha-1} k$.

(b) (6 Pontos) Descreva problema da família representativa em uma estrutura de mercado Arrow-Debreu. Resolva o problema, isto é, encontre a Equação de Euler e uma equação que determina os preços relativos (p_{t+1}/p_t) nesta economia.

Solução: O problema é padrão, só não podemos esquecer do lucro das famílias que é positivo.

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty} \geq 0} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t),$$

$$\text{sujeito à} \quad \sum_{t=0}^{\infty} p_t(c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t r_t k_t + \pi$$

$$k_0 \text{ dado.}$$

As condições de primeira ordem implicam na tradicional Equação de Euler e na equação dos preços relativos:

$$\frac{\beta u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} = \frac{\beta c_t}{c_{t+1}} = \frac{p_{t+1}}{p_t} \qquad \forall t$$
$$\frac{p_{t+1}}{p_t} = \frac{1}{1 + r_{t+1} - \delta} \qquad \forall t$$

(c) (5 Pontos) Defina um equilíbrio competitivo para esta economia.

Solução: Padrão. Não é necessário escrever as alocações nem a condição de equilíbrio do mercado de trabalho.

(d) (5 Pontos) Escreva um sistema de equações que pode ser utilizado para encontrar as variáveis (y, c, k, i, r) no estado estacionário (note que o número de equações tem que ser igual ao número de variáveis). NÃO é necessário reduzir o sistema ou descrever um algoritmo para encontrar a solução.

Solução:

Equação de Euler:	$\beta(1 + r - \delta) = 1$
Produtividade Marginal de K:	$r = \alpha k^{\alpha-1}$
Lei de Movimento:	$i = \delta k$
Restrição de Recursos:	$y = c + i$
Função de produção:	$y = k^{\alpha}$

2. **(Investimento em Capital Humano - 19 pontos).** Considere um agente que acumula capital human $h_t \geq 0$ de acordo com a tecnologia $h_{t+1} = g(h_t) + x_t$ onde $x_t \geq 0$ é um investimento monetário em capital humano e $g(.)$ uma função contínua, limitada e estritamente crescente. O agente não pode poupar, e recebe rendimentos do trabalho wh_t (o salário $w > 0$ é fixo). O agente deriva utilidade de acordo com:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t),$$

onde $u(.)$ é contínua, limitada, estritamente crescente e côncava. A restrição orçamentária do agente em todos os períodos é:

$$c_t + x_t \leq wh_t,$$

e $h_0 > 0$ dado.

(a) (6 pontos) Descreva o problema em forma de programação dinâmica: escreva a equação de Bellman e enuncie claramente o estado, controle, conjunto restrição do controle e a função retorno.

Solução: A restrição orçamentária é sustentada com igualdade já que a utilidade é estritamente crescente. Note que podemos escrever o problema com diferentes controles (x, h' ou até mesmo c). É necessário tomar cuidado e escrever a lei de movimento do estado corretamente caso o estado não seja igual ao controle.

$$V(h) = \max_{x \in [0, wh]} \{u(wh - x) + \beta V(g(h) + x)\}, \text{ ou}$$
$$V(h) = \max_{h' \in [g(h), g(h)+wh]} \{u(wh + g(h) - h') + \beta V(h')\}$$

(b) (6 pontos) Defina um operador T em $C(X)$ (conjunto de funções contínuas e limitadas com a norma do supremo) que nos permitirá encontrar a função valor. Mostre que o operador T é um mapa de $C(X)$ para $C(X)$.

Solução: Operador:

$$TV(h) = \max_{x \in [0, wh]} \{u(wh - x) + \beta V(g(h) + x)\}$$

É necessário aplicar o Teorema do Máximo de Bergé. Argumente que o operador satisfaz as suposições do teorema.

- $\Gamma(h) = [0, wh]$ ou $\Gamma(h) = [g(h), g(h) + wh]$ são correspondências não-vazia, contínuas, com valores compactos (e convexos).
- Suponha que $V \in C(X)$, logo $f(h, x) \equiv u(wh - x) + \beta V(g(h) + x)$ ou $f(h, h') \equiv u(wh + g(h) - h') + \beta V(h')$ são funções contínuas já que u, g, V são contínuas e a soma e a composição de funções contínuas também é contínua.

Logo podemos aplicar Bergé e $TV(h)$ é contínua. Se V é limitada, como u é limitada e a soma de funções limitadas também é limitada temos que $TV(h)$ é limitada. Logo $TV(h) \in C(X)$.

(c) (7 pontos) Mostre que a equação de Bellman tem uma solução única e descreva como essa solução pode ser encontrada.

Solução: Sabemos que pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, o operador possui um único ponto fixo (a solução única da Bellman) e podemos encontrar a V utiizando um processo iterativo: $T^n V_0 \to V$ para qualquer $V \in C(X)$. Vamos checar as condições de Banach:

- Note que $C(X)$ é um espaço de Banach.
- Já sabemos que $T : C(X) \to C(X)$, logo é necessário mostrar que T é uma contração. Siga os passos feitos em sala de aula e mostre que a Bellman satisfaz as condições suficientes de Blackwell: desconto e monotonicidade.

3. **(Consumo e Poupança com Aposentadoria Endógena - 19 pontos).** Considere o problema de um agente que vive uma vida finita, decide quanto consumir, poupar e quando se aposentar. O agente recebe utilidade do consumo e desutilidade $\gamma > 0$ ao trabalhar. A utilidade deste agente é:

$$\mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^{T} \beta^t [u(c_t) - \gamma d_t],$$

onde d_t é uma função indicadora que tem valor 1 se o indivíduo está trabalhando e 0 se estiver aposentado, $u(.)$ é contínua, estritamente crescente e côncava, e $\beta \in (0, 1)$.

Suponha que o agente pode poupar a uma taxa de juros bruta, $(1 + r) > 1$ e que ele não pode tomar empréstimos: $a_{t+1} \geq 0$. A restrição orçamentária é:

$$c_t + a_{t+1} = y_t + a_t(1 + r), \qquad t = 0., 1, 2, ...T,$$

e $a_0 = 0$. A renda do indivíduo é dada por:

$$y_t = \begin{cases} w_t, & \text{se está trabalhando } (d_t = 1), \\ p(x_t), & \text{se está aposentado } (d_t = 0), \end{cases}$$

onde o salário, w_t, segue uma cadeia de Markov de primeira ordem, e a aposentadoria, $p(x_t)$, é uma função dos anos trabalhados, x_t, sendo que $p'(x_t) \geq 0$. Note que $x_0 = 0$ e que cada ano trabalhado $x_{t+1} = x_t + 1$, enquanto durante a aposentadoria $x_{t+1} = x_t$.

O *timing* do problema é o seguinte: no início do período o agente observa a realização do salário, e logo após decide se aposentar ou não. Depois da decisão de aposentaria, ele recebe pensão/salário e decide quanto consumir/poupar. Caso decida se aposentar, o agente NÃO pode voltar a trabalhar.

(a) (6 pontos) Qual é o valor para um indivíduo que acabou de se aposentar com idade t? Encontre uma expressão ou equação que determine esse valor.

Solução: Defina $V_t^{Ap}(a)$ como o valor de um indivíduo que decidiu se aposentou com idade t:

$$V_t^{Ap}(a) = \max_{\{a_{t+s+1}\}_{s=0}^{T}} \sum_{s=0}^{T} \beta^s u(p(t) + a_{t+s}(1 + r) - a_{t+s+1})$$

Note que $p(t)$ é fixo após a aposentadoria. Apesar de não ser o ideal, pode-se escrever em forma de programação dinâmica. O importante é que esteja explícito que $p(x)$ é fixo após a decisão de aposentadoria e por isso é necessário separar a idade t dos anos trabalhados x.

Observação: Não é necessário fazer isso neste problema, mas na prática, quando temos a forma funcional $u()$, podemos utilizar equação de Euler juntamente com $a_{T+1} = 0$ e encontrar uma forma analítica para $V_t^{Ap}(a)$.

(b) (7 pontos) Escreva a equação de Bellman do agente (antes da decisão de aposentadoria) e enuncie claramente quais são os estados e controles (e suas restrições).

Solução:

- Estado: t, a, e w. Não é necessário utilizar x como um estado, já que é exatamente igual a t. Caso o timing do problema fosse diferente poderiamos escrever com a formulação *cash-on-hand*.[1]
- Controles: $d = \{0, 1\}$ e $a' \in [0, w + a(1 + r)]$ (caso esteja trabalhando).
- Defina $V_t^W(a, w)$ como o valor após a decisão de seguir trabalhando. A equação de Bellman:

$$V_t(a,w) = \max_{d \in \{0,1\})} \{d_t V_t^W(a,w) + (1-d_t)V_t^{Ap}(a)\} = \max\{V_t^W(a,w), V_t^{Ap}(a)\}$$
$$V_t^W(a,w) = \max_{a' \in [0, w+a(1+r)]} \{u(w + a(1+r) - a') - \gamma + \beta \mathbb{E}[V_{t+1}(a', w')|w]\}$$

(c) (6 pontos) Descreva um algoritmo para encontrar a equação de Bellman do agente.

Solução: Como é um problema de tempo finito podemos resolver utilizando *backward induction* sabendo que $a_{T+1} = 0$. Já que o problema envolve uma escolha discreta (aposentadoria) é necessário resolver as duas funções valor. O ideal é sempre começar pelo estado absorvente (neste caso é a aposentadoria).

Na questão (a), vimos que o valor da aposentadoria:

$$V_t^{Ap}(a) = \max_{\{a_{t+s+1}\}_{s=0}^T} \sum_{s=0}^{T} \beta^s u(p(t) + a_{t+s}(1+r) - a_{t+s+1})$$

Já que a renda $p(t)$ é determinada no momento da aposentadoria e é constante. O valor da aposentadoria (em cada idade t) pode ser computado utilizando *backward induction* ou via equação de euler.

Uma vez que temos $V_t^{Ap}(a)$ para todas as idades, podemos computar $V_t(a, w)$ de trás para frente. Começamdo pelo último período:

$$V_T(a,w) = \max\{V_T^W(a,w), V_T^{Ap}(a)\}$$
$$V_T(a,w) = \max\{u(w + a(1+r)) - \gamma, u(p(T) + a(1+r))\}.$$

Com $V_T(a, w)$ podemos utillizar a cadeia de Markov de w e computar a esperança $\mathbb{E}[V_T(a', w')|w] = \int V_T(a', w') f(w'|w) dw'$. Com isso o valor de trabalhar em $T - 1$:

$$V_{T-1}^W(a,w) = \max_{a' \in [0, w+a(1+r)]} \{u(w + a(1+r) - a') - \gamma + \beta \mathbb{E}[V_T(a', w')|w]\},$$

e utilizando $V_{T-1}^{Ap}(a)$ podemos computar $V_{T-1}(a, w)$:

$$V_{T-1}(a,w) = \max\{V_{T-1}^W(a,w), V_{T-1}^{Ap}(a)\}.$$

Utilizando esse processo iterativo podemos computar $V_{T-1}(a, w)$, $V_{T-2}(a, w), ...V_0(a, w)$.

[1] O problema foi baseado em Iskhakov et al (2017, Quantitative Economics).