Análise Macroeconômica 1 (332020)
Avaliação Final 2021.1
03 de Novembro

Instruções

- A duração total da prova é de 4 horas, incluindo o tempo destinado para a entrega.
- A prova consiste em 4 perguntas totalizando 80 pontos.
- Coloque o seu nome, assinatura e número de matrícula na primeira página da prova.
- Consulta à qualquer material é permitido. Não é permitido comunicar-se com outras pessoas durante a prova.
- Mantenha a prova organizada: não coloque perguntas diferentes na mesma página e mantenha as páginas numeradas.
- Se algo na pergunta não estiver claro, indique as suposições que você acha necessárias para ter um problema bem definido e prossiga.
- Se você ficar preso em uma parte específica de uma pergunta, lembre-se de que você pode considerar o resultado dessa parte como dado e continuar a responder às outras partes.

Questões

1. **(Acumulação de Capital Humano em Tempo Contínuo com Retornos Decrescentes - 19 pontos).** Considere o problema de um trabalhador que acumula capital humano, h_t, em um ambiente com tempo contínuo e horizonte infinito. Durante um intervalo de tempo Δt, o salário do trabalhador é dado por $wf(h_t)$, onde $w > 0$ é o salario exógeno e constante, e $f()$ é uma função que captura os retornos para o capital humano e satisfaz $f > 0$, $f' > 0$, e $f'' \leq 0$.

   O trabalhador acumula capital humano da seguinte forma. Em um intervalo de tempo $[t, t+\Delta t)$, o trabalhador escolhe o esforço $x_t \geq 0$, e o estoque de capital humano aumenta em $x_t \Delta t$ ao longo do intervalo (não há depreciação do capital humano). O custo de esforço é uma função quadrática. O trabalhador maximiza o fluxo descontado do salário menos o custo do esforço.

$$\int_0^\infty e^{-rt} \left[wf(h_t) - \frac{c}{2} x_t^2 \right] dt,$$

   onde $c > 0$ é um parâmetro, não há restrições de empréstimo, e $h_0 = 0$.

   (a) (3 pontos) Escreva a lei de movimento do capital humano em um intervalo arbitrário Δt. Derive a sua forma diferencial, isto é, encontre, $\dot{h}_t = dh_t/dt$.

   Solução: Não há depreciação, a acumulação de capital humano em Δt é:

$$\begin{aligned}
h_{t+\Delta t} &= h_t + x_t \Delta t \\
\frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} &= x_t \\
\lim_{\Delta t \to 0} \frac{h_{t+\Delta t} - h_t}{\Delta t} &= \dot{h}_t = x_t
\end{aligned}$$

   (b) (3 pontos) Seja $V(h)$ o valor de um trabalhador com h_t unidades de capital humano. A função valor em um intervalo discreto Δt (i.e. princípio de otimalidade de Bellman) é:

$$V(h) = \max_{x \geq 0} \{ g(h,x)\Delta t + e^{-r\Delta t} V(h + z(h,x)\Delta t) \}$$

   onde $g(h,x)$ e $z(h,x)$ são funções. Encontre as funções $g(h,x)$ e $z(h,x)$.

   Solução: A função $g(h,x)$ é o retorno (salário menos custo), $z(k,i)$ vem da lei de movimento do capital humano:

$$\begin{aligned}
g(h,x) &= wf(h) - \frac{c}{2}x^2 \\
z(h,x) &= x
\end{aligned}$$

   (c) (7 pontos) A partir da função valor em um intervalo discreto, encontre a equação Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) do problema.[1]

   Solução: Expansão de Taylor de primeira ordem em torno de $\Delta t = 0$:

$$e^{-r\Delta t} V(h + z(h,x)\Delta t) = V(h) + [-rV(h) + z(h,x)V_h(h)]\Delta t + o(\Delta t),$$

[1] Caso você não tenha encontrado as funções $g(h,x)$ e $z(h,x)$, utilize a forma geral dada na parte (b) como ponto partida.

onde $V_h(h)$ é a derivada em relação à h e $o(\Delta t)$ são termos que $\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$. Substituindo, re-organizando a equação, dividindo por Δt e tomando o limite com relação à Δt:

$$
\begin{aligned}
V(h) &= \max_x \{g(h,x)\Delta t + V(h) + [-rV(h) + z(h,x)V_h(h)]\Delta t + o(\Delta t)\} \\
rV(h) &= \max_x \{g(h,x) + z(h,x)V_h(h)\},
\end{aligned}
$$

e encontramos a HJB. Utilizando as funções g e z:

$$rV(h) = wf(h) + \max_{x \geq 0} \{-\frac{c}{2}x^2 + xV_h(h)\}.$$

(d) (6 pontos) A partir da HJB, derive uma equação de Euler para a escolha de esforço ótimo, ou seja, encontre uma equação diferencial que expressa $\dot{x}_t$ como uma função de x_t e de h_t. Assuma que a função valor é duas vezes diferenciável (*dica:* utilize os mesmos passos do problema de consumo e poupança padrão).[2]

Solução: Temos que tirar a c.p.o com relação a x e aplicar o teorema do envelope. A c.p.o:

$$cx^* = V_h(h),$$

ou seja, custo marginal de capital humano é igual ao benefício marginal de capital humano. O envelope:

$$
\begin{aligned}
rV_h(h) &= wf_h(h) + x^*(h)V_{hh}(h) + x_h^*(h) \underbrace{[V_h - cx^*(h)]}_{=0} \\
rV_h(h) &= wf_h(h) + x^*(h)V_{hh}(h)
\end{aligned}
$$

Utilizando a lei de movimento de capital humano em forma diferencial:

$$x_t^*(h_t)V_{hh}(h_t) = \dot{h_t}^* V_{hh}(h_t) = \frac{dV_h(h_t)}{dt}.$$

Tomando a derivada da c.p.o em relação ao tempo:

$$c\dot{x}_t = \frac{dV_h(h_t)}{dt}.$$

Substituindo todos os termos encontramos a equação de euler do problema:

$$
\begin{aligned}
\frac{dV_h(h_t)}{dt} &= rV_h(h_t) - wf_h(h_t) \\
c\dot{x}_t &= rcx_t - wf_h(h_t) \\
\dot{x}_t &= rx_t - \frac{w}{c}f_h(h_t) \qquad \forall t.
\end{aligned}
$$

Resolvendo o problema via Hamiltoniano chegamos na mesma solução.

[2]Caso você não tenha conseguido derivar a HJB, utilize o Hamiltoniano para resolver o problema (neste caso a pontuação máxima da pergunta é igual a 4 pontos).

2. **(Imposto sobre o Capital no Ramsey-Cass-Koopmans - 22 pontos).** Considere o modelo Ramsey-Cass-Koopmans com imposto sobre o capital.

   A firma representativa produz um único bem final utilizando capital e trabalho que pode ser consumido ou investido. A função de produção segue as típicas suposições neoclássicas (retornos constante a escala, produto marginal decrescente e Inada): $Y_t = F(K_t, Z_t L_t)$. A população cresce a taxa n e a tecnologia cresce a taxa g:

$$\frac{\dot{Z}_t}{Z_t} = g \qquad \& \qquad \frac{\dot{L}_t}{L_t} = n,$$

   com $Z_0 = 1$, $L_0 = 1$ e $K_0 > 0$. A preferência da família representativa é dado por:

$$\max_{c_t \geq 0} \int_0^\infty e^{-(\rho - n - g(1-\sigma))t} \frac{\tilde{c}_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} dt,$$

   onde $\tilde{c}_t = C_t/(Z_t L_t)$ é o consumo por unidade eficiente do trabalho e $\rho > n + g(1-\sigma)$.

   As famílias estão sujeitas à imposto sobre o capital. O imposto arrecadado é rebatido de volta para o as famílias a partir de uma transferência *lump-sum*. A restrição orçamentária agregada é

$$\dot{A}_t = (r_t - \delta)(1 - \tau_k)A_t + w_t L_t - C_t + T_t \qquad \forall t,$$

   onde A_t é quantidade de ativos de todas as famílias da economia e T_t é a transferência *lump-sum* (agregada). Suponha que a condição no-Ponzi e a TVC são satisfeitas.

   (a) (5 pontos) Utilize a restrição orçamentária (agregada) e encontre a restrição orçamentária por unidade eficiente de trabalho:

$$\dot{\tilde{a}}_t = \tilde{a}_t[(r_t - \delta)(1 - \tau_k) - n - g] - \tilde{c}_t + \tilde{w}_t + \tilde{\tau}_t \qquad \forall t.$$

   onde $\tilde{w}_t = w_t/Z_t$, $\tilde{a}_t = A_t/(Z_t L_t)$ e $\tilde{\tau}_t = T_t/(Z_t L_t)$.
   Solução:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_t &= (r_t - \delta)(1 - \tau_k)A_t + w_t L_t - C_t + T_t \\
\frac{\dot{A}_t}{Z_t L_t} &= (r_t - \delta)(1 - \tau_k)\frac{A_t}{Z_t L_t} + \frac{w_t L_t}{Z_t L_t} - \frac{C_t}{Z_t L_t} + \frac{T_t}{Z_t L_t} \\
\frac{\dot{A}_t}{Z_t L_t} &= (r_t - \delta)(1 - \tau_k)\tilde{a}_t + \tilde{w}_t - \tilde{c}_t + \tilde{\tau}_t,
\end{aligned}$$

   e utilizando

$$\frac{\dot{\tilde{a}}_t}{\tilde{a}_t} = \frac{\dot{A}_t}{A_t} - n - g \qquad \& \qquad A_t = \tilde{a}_t Z_t L_t \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\dot{A}_t}{Z_t L_t} = \dot{\tilde{a}}_t + \tilde{a}_t(n + g),$$

   encontramos a equação pedida.

(b) (5 pontos) Resolva o problema das famílias. Escreva o Hamiltoniano e encontre a Equação de Euler.

Solução: Hamiltoniano (descontado):

$$\hat{H}(\tilde{a}_t, \tilde{c}_t, \mu_t) = u(\tilde{c}_t) + \mu_t(\tilde{a}_t[(r_t - \delta)(1 - \tau_k) - n - g] + \tilde{w}_t - \tilde{c}_t)$$

Condições necessárias (junto com a no-Ponzi e LOM do estado) em todo t:

$$\begin{aligned} u'(\tilde{c}_t) &= \mu_t \\ \mu_t[(r_t - \delta)(1 - \tau_k) - n - g] &= -\dot{\mu}_t + (\rho - n - g(1 - \sigma))\mu_t \end{aligned}$$

Equação de Euler:

$$\frac{u''(c_t)\dot{c}_t}{u'(c_t)} = -[(r_t - \delta)(1 - \tau_k) - \rho - g\sigma) \qquad \forall t.$$

Utilizando a forma funcional da utilidade, encontramoss a EE:

$$\frac{\dot{c}_t}{c_t} = \frac{(r_t - \delta)(1 - \tau_k) - \rho - g\sigma}{\sigma} \qquad \forall t.$$

(c) (6 pontos) Suponha que os preços são dados por $r_t = f'(\tilde{k}_t)$ e $\tilde{w}_t = f(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t f'(\tilde{k}_t)$. Encontre um sistema de equações que caracteriza o equilíbrio desta economia. Mostre como esse sistema se comporta em um diagrama de fases.

Solução: O sistema é composto pela Equação de Euler e pela restrição de recursos. É possível encontrar a restrição de recursos de duas maneiras: (i) utilizando o equilíbrio no mercado de bens agregada e aplicando os passos da parte (a); ou (ii) utilizando a restrição orçamentária em trabalho eficiente e utilizando o fato que em equilíbrio $\tilde{\tau} = \tilde{k}_t(r_t - \delta)\tau_k$.

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}_t}{c_t} &= \frac{(f'(\tilde{k}_t) - \delta)(1 - \tau_k) - \rho - g\sigma}{\sigma} \\ \dot{\tilde{k}} &= f(\tilde{k}_t) - (\delta + n + g)\tilde{k}_t - \tilde{c}_t \end{aligned}$$

Esse sistema, juntamente com a TVC e $\tilde{k}_0$ caracteriza o equilíbrio desta economia. O diagrama de fases é padrão e segue o visto em sala de aula.

(d) (6 pontos) Suponha que estamos no estado estacionário. Em t_0 o governo anuncia que irá aumentar *permanentemente* o imposto sobre o capital em t_1. Defina t_2 como o período em que a economia atinge o estado estacionário novamente. Descreva a dinâmica de transição nesta economia (utilize o diagrame de fases e outros gráficos se necessário).

Solução: Um aumento de τ_k reduz o capital no estado estacionário:

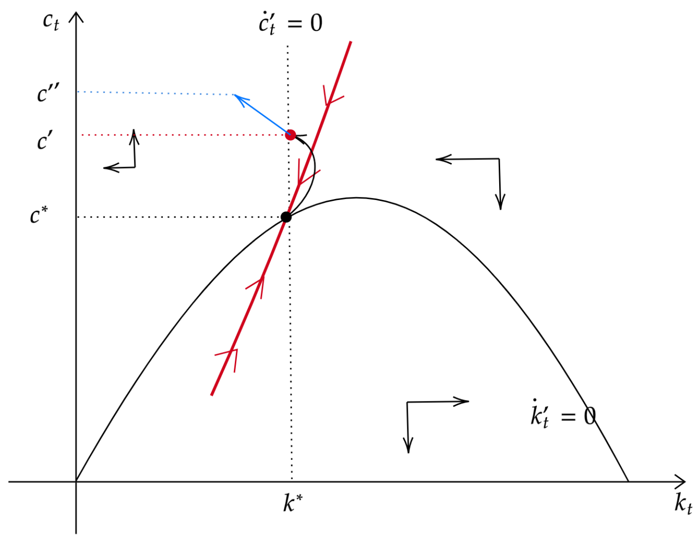
$$f'(\tilde{k}) = \delta + \frac{\rho + \sigma g}{1 - \tau_k},$$

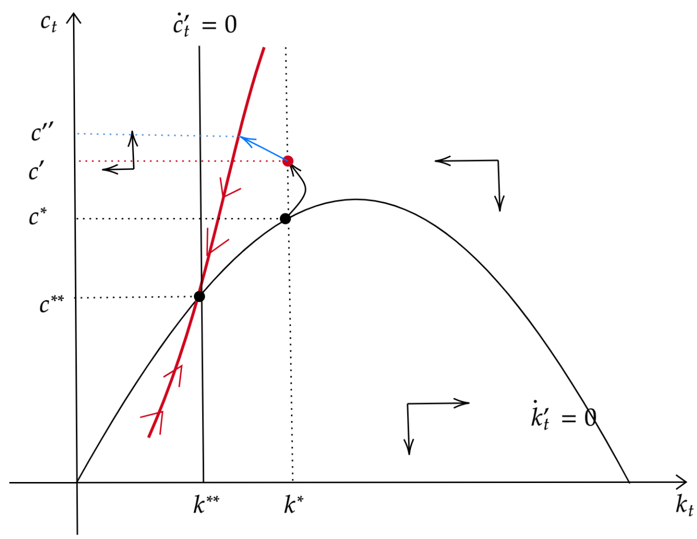
ou seja, a reta vertical $\dot{c}$ se desloca para esquerda em t_1.

Em t_0 a família recebe a notícia que o imposto será maior em t_1, logo eles tem excesso de capital em t_0:

- As famílias reagem diminuindo a poupança em t_0: consumo salta para cima (capital é pré-determinado e não muda imediatamente).

- Entre t_0 e t_1 capital diminui e consumo aumenta.
- Em t_1 o imposto muda, o capital e o consumo estarão EXATAMENTE no caminho de sela do novo estado estacionário.
- Entre t_1 e t_2 capital e consumo diminui no caminho de sala até chegar no novo estado estacionário com menor capital e consumo.





3. **(OLG com Imposto sobre o Consumo - 16 pontos).** Considere o modelo OLG padrão onde o agente trabalha quando jovem e consome a poupança quando velho. Todas as suposições são usuais e seguem o modelo visto na aula. A utilidade é:

$$\frac{(c_t^1)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}+\beta\frac{(c_{t+1}^2)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}.$$

O agente está sujeito à um imposto sobre o consumo quando jovem: $\tau_c > 0$. Não há imposto sobre o consumo para os velhos.[3] A receita tributária é jogada no oceano. As restrições orçamentárias do agente quando jovem e velho para todas as gerações $t \geq 1$:

$$\begin{aligned} c_t^1(1+\tau_c)+s_t &\leq w_t \\ c_{t+1}^2 &\leq (1+r_{t+1})s_t, \end{aligned}$$

onde assumimos que $\delta = 0$. A função de produção é: $Y_t = K_t^{\alpha}L_t^{1-\alpha}$, com $\alpha \in (0,1)$ e a população cresce $L_t = (1+n)^t L_0$ onde $L_0 = 1$. A geração de velhos iniciais tem $K_0 > 0$ dado.

(a) (7 pontos) Resolva o problema das famílias. Encontre s_t em função dos parâmetros e dos preços. Sob quais condições o imposto sobre o consumo τ_c não afeta a poupança s_t?

Solução: Substituindo s_t para encontrar a restrição orçamentária intertemporal e escrevendo o Lagrangiano:

$$\mathcal{L}=\frac{(c_t^1)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}+\beta\frac{(c_{t+1}^2)^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}+\lambda_t\left(w_t-c_t^1(1+\tau_c)-\frac{c_{t+1}^2}{1+r_{t+1}}\right) \tag{1}$$

O que implica na Equação de Euler:

$$c_{t+1}^2 = c_t^1[(1+\tau_c)\beta(1+r_{t+1})]^{1/\sigma} \qquad \forall t.$$

Note que $(1+\tau_c)$ está desincentivando o consumo quando jovem e incentivando o consumo quando velho (ou seja, incentivando a poupança). Utilizando a restrição orçamentária e substituindo na equação de Euler:

$$\begin{aligned} (1+r_{t+1})(1+\tau_c)s_t &= (w_t-s_t)[(1+\tau_c)\beta(1+r_{t+1})]^{1/\sigma} \\ s_t &= \frac{w_t}{1+\beta^{-1/\sigma}[(1+r_{t+1})(1+\tau_c)]^{1-1/\sigma}} \qquad \forall t, \end{aligned}$$

e encontramos s_t em função dos parâmetros e preços. Quando $\sigma = 1$ (utilidade log) o imposto sobre o consumo não afeta a poupança.

(b) (4 pontos) Resolva o problema da firma e escreva os preços em função do capital por trabalhador: $k_t \equiv K_t/L_t$.

Solução: Padrão.

$$\begin{aligned} r_t &= \alpha\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha-1} = \alpha k_t^{\alpha-1} \qquad \forall t \\ w_t &= (1-\alpha)\left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} = (1-\alpha)k_t^{\alpha} \qquad \forall t, \end{aligned}$$

[3] Uma interpretação simples é que a cesta de consumo do agente jovem é diferente da cesta do agente velho (e.g. jovens consomem *TikTok* e velhos planos de saúde). O governo observa essa diferença e taxa apenas o bem consumido pelos jovens.

(c) (5 pontos) Escreva as condições de equilíbrio no mercado de bens e no mercado de ativos. Suponha $\sigma = 1$ (i.e. utilidade log). Encontre a equação que descreve a evolução do capital de equilíbrio no modelo (k_{t+1} em função de k_t e parâmetros).

Solução: As condições de equilíbrio no mercado de bens e ativos são, para todo $t \geq 1$:

$$\begin{aligned}
c_t^1 + \frac{c_{t+1}^2}{1+n} + k_{t+1}(1+n) - k_t &= k_t^\alpha \\
k_{t+1} &= \frac{s_t}{1+n}
\end{aligned}$$

Utiliando a condição de equilíbrio no mercado de ativos, $\sigma = 1$ e a equação da poupança:

$$k_{t+1} = \frac{\beta(1-\alpha)k_t^\alpha}{(1+n)(1+\beta)}.$$

A lei de movimento do capital em equilíbrio é padrão. Pela suposição de $\sigma = 1$ o imposto sobre o consumo não afeta o equilíbrio do modelo.

4. **(RBC com dois agentes - 23 pontos).** Considere o modelo RBC com dois tipos de agentes: os agentes “Ricardianos” e os agentes “Keynesianos”. Existe uma massa unitária de agentes na economia, onde uma fração γ dos agentes são Ricardianos.

   Os agentes Keynesiano são *hand-to-mouth*, isto é, eles não tem acesso ao mercado de capital e por isso não poupam. Já os agentes Ricardianos são os típicos agentes considerado no modelo padrão. Eles escolhem o quanto poupar e por isso acumulam capital. Ambos agentes escolhem quanto consumir e quanto trabalhar.

   Os agentes estão sujeitos à mesma função utilidade. Seja $i \in \{R,\ K\}$ o tipo de agente, onde R indica que o agente é Ricardiano e K indica que é Keynesiano, a função utilidade é:

$$\mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\log C_t^i + \theta \log(1 - N_t^i)\right),$$

   onde C_t^i e N_t^i é o consumo e o trabalho e $\beta \in (0,1)$. A restrição orçamentária dos agentes Ricardianos é:

$$C_t^R + K_{t+1}^R = W_t N_t^R + (1 + r_t - \delta) K_t^R \qquad \forall t.$$

   Já a restrição orçamentária dos agentes Keynesianos é:

$$C_t^K = W_t N_t^K \qquad \forall t.$$

   O resto do modelo é padrão. A função de produção agregada é: $Y_t = Z_t K_t^{\alpha}, N_t^{1-\alpha}$, onde $\alpha \in (0,1)$. O choque segue um processo estocástico AR(1): $\log Z_t = \rho \log Z_{t-1} + \sigma \varepsilon_t$ onde ε_t tem média 0 e desvio padrão 1. Não há crescimento populacional. $K_0 > 0$ é dado. Assuma que a condição de Transversalidade é satisfeita.

   (a) (5 pontos) Descreva e resolva o problema do agente Ricardiano em um ambiente competitivo. Derive a equação de euler e a equação que determina a oferta de trabalho. Qual condição é intertemporal e qual condição é intratemporal?

   Solução: Os agentes Ricardianos são os agentes típicos do modelo RBC, onde o nível de consumo depende da sua renda permanente. O problema é padrão:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (\log(C_t^R) + \theta \log(1 - N_t^R)) + \lambda_t (W_t N_t^R + (1 + r_t - \delta) K_t^R - C_t^R - K_{t+1}^R)$$

   Resolvendo as c.p.o encontramos a EE e a equação da oferta de trabalho:

$$(EE) \qquad \frac{1}{C_t^R} = \mathbb{E}_t \left[\beta (1 + r_{t+1} - \delta) \frac{1}{C_{t+1}^R}\right] \qquad \forall t$$

$$(LS) \qquad \frac{\theta}{1 - N_t^R} = \frac{W_t}{C_t^R} \qquad \forall t$$

   A Equação de Euler é a condição intertemporal, e a equação da oferta de trabalho (LS) é a condição intratemporal.

(b) (7 pontos) Descreva e resolva o problema do agente Keynesiano. Derive a elasticidade de Frisch para o agente Keynesiano. Escreva o consumo ótimo e a número de horas trabalhadas em função dos preços e dos parâmetros.

Solução: Note que para o agente Keynesiano o problema é estático. Para todo t, o problema se resume a:

$$\max_{C_t^K,\ N_t^K} \{\log(C_t^K) + \theta \log(1 - N_t^K)\} \qquad \text{suj. à.} \quad C_t^K = W_t N_t^K$$

c.p.o implica na mesma equação de oferta de trabalho do agente Ricardiano:

$$\frac{\theta}{1 - N_t^K} = \frac{W_t}{C_t^K} \qquad \forall t$$

A elasticidade de Frisch é definida como: $\frac{d \log N_t^K}{d \log W_t}$ mantendo C_t^K constante. Utilizando os mesmos passos dos slides, encontramos a Elasticidade de Frisch:

$$\frac{d \log N_t^K}{d \log W_t} = \left(\frac{1 - N_t}{N_t}\right).$$

Para encontrar N_t^k e C_t^K em função dos parâmetros utilizamos LS e a restrição orçamentário e:

$$\frac{\theta}{1 - N_t^K} = \frac{1}{N_t^K} \Leftrightarrow N^K = \frac{1}{1+\theta}$$
$$C_t^K = \frac{W_t}{1+\theta}.$$

Ou seja, a elasticidade de Frisch é a mesma para os dois agentes, mas a quantidade de horas trabalhadas não flutua para o agente Keynesiano. Isso ocorre porque o agente não poupa, logo toda mudança no salário é transmitida diretamentte para o consumo (e o efeito riqueza cancela completamente o efeito substituição na equação da oferta de trabalho).

(c) (5 pontos) A lei de movimento do capital agregado do modelo é padrão:[4]

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t.$$

Defina a variável em desvios % do estado estacionário como $\tilde{x}_t = \log X_t - \log \bar{X}$, onde $\bar{X}$ é o estado estacionário de X_t. Loglinearize a equação acima, ou seja, derive a lei de movimento do capital agregado em desvios % do estado estacionário.

Solução:

$$\tilde{k}_{t+1} = (1 - \delta)\tilde{k}_t + \frac{\bar{I}}{\bar{K}}\tilde{i}_t.$$

(d) (6 pontos) Suponha que os preços são dados por $r_t = Z_t \alpha (K_t/N_t)^{\alpha - 1}$ e $W_t = Z_t(1 - \alpha)(K_t/N_t)^{\alpha}$. Como a razão do capital-trabalho no estado estacionário, $\bar{K}/\bar{N}$, muda quando a fração de agentes Ricardianos da economia aumenta ($\uparrow \gamma$)?

[4] Neste modelo apenas os agentes Ricardianos acumulam capital e portanto o capital agregado é $K_t = \gamma K_t^R$.

Solução: Não muda. Note que via EE do agente Ricardiano:

$$\frac{1}{C_t^R} = \mathbb{E}_t \left[\beta(1 + Z_{t+1}\alpha(K_{t+1}/N_{t+1})^{\alpha-1} - \delta)\frac{1}{C_{t+1}^R} \right],$$

encontramos a razão do capital-trabalho no estado estacionário, $\bar{K}/\bar{N}$:

$$\beta(1 + \bar{Z}\alpha(\bar{K}/\bar{N})^{\alpha-1} - \delta) = 1,$$

e não depende de γ.